Sup PCSI 2 — Exercices : coniques (1)

Coniques, niveau facile

Q1 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $4y^2 + 8x = 52 + x^2$.

Q2 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $4y^2 + x^2 = 99 - 2x$.

Q3 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $y^2 - 9x^2 = 35 - 6y$.

Q4 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $y^2 = 63 + 9x^2 - 2y$.

Q5 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $9y^2 - 4x^2 = 41 - 16x$.

Q6 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $4y^2 + 8x = 20 - x^2$.

Q7 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$.

Q8 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 41 = 0$.

Q9 Nature et éléments géométriques de la courbe d'équation $z^3 - 3z^2 + 4z = \overline{z}^3 - 3\overline{z}^2 + 4\overline{z}$.

Q10 Nature et éléments géométriques de la courbe d'équation $x = e^t + e^{-t} - 1$, $y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$.

Q11 Nature et éléments géométriques de la courbe décrite par le paramétrage $x = 2\cos(t)$, $y = 1 + 3\sin(t)$.

Coniques, niveau moyen

Q12 Construisez la courbe d'équation $16x^2 + 25y|y| + 96x - 256 = 0$.

Q13 Construisez la courbe d'équation $\dfrac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$.

Q14 Construisez la courbe d'équation $4x|x| + 9y|y| = 36$ dans un repère orthonormé.

Q15 Discutez, en fonction de m, la nature de la courbe d'équation $2mx^2 - 8mx - (m-1)y^2 + 12m - 2 = 0$.

Q16 Discutez en fonction de $m \in \mathbb{R}$ la nature et les éléments géométriques (centre, axes) de la conique d'équation $mx^2 - 6mx + (2-m)y^2 - 4y(2-m) + 4m + 9 = 0$.

Q17 Soient O et A deux points distincts. Déterminez l'ensemble des cercles qui passent par A, et qui sont vus de O sous un angle droit (autrement dit : on peut mener, de O, deux tangentes à ce cercle, perpendiculaires l'une à l'autre).

Q18 Quel est l'ensemble des foyers des paraboles contenant deux points donnés et dont la directrice est donnée ?

Q19 Déterminez l'ensemble (C) des foyers des paraboles passant par un point fixé A et de directrice D donnée. Comment se déduit de (C) l'ensemble (E) des sommets de ces paraboles ? Prouvez que (E) est une ellipse privée de l'un de ses sommets ; précisez ses éléments.

Q20 On connaît le foyer et deux points d'une parabole ; construisez sa directrice.

Q21 Déterminez l'ensemble des centres des cercles tangents à une droite (D) donnée et passant par un point fixé F situé hors de D. Même question, en remplaçant la droite par un cercle.

Q22 On fixe un plan P de l'espace, un point F situé hors de P, et un réel $e > 0$. Soit M un point de l'espace, on note H son projeté orthogonal sur P. Déterminez l'ensemble des points M tels que $MF = e\,MH$.

Q23 Soient C et C' deux cercles du plan. Déterminez l'ensemble E des points M du plan tels que la somme des distances de M à C et C' soit égale à une constante d fixée.

Q24 Déterminez l'ensemble des points du plan d'où l'on voit une parabole donnée sous un angle droit (autrement dit : on peut mener deux tangentes à la parabole, orthogonales entre elles).

Un exercice donné en DS (Bac C, Paris 1976)

► Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ et $k > 0$, on note $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ la courbe d'équation $(1+\lambda)x^2 + (1-\lambda)y^2 = k$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Q1 Étudiez rapidement les courbes $\mathcal{C}_{0,k}$, $\mathcal{C}_{1,k}$ et $\mathcal{C}_{-1,k}$.

Q2 Montrez que la conique d'équation $3x^2 + y^2 = 12$ fait partie de la famille des courbes $\mathcal{C}_{\lambda,k}$. Précisez tous ses paramètres géométriques, et dessinez cette conique.

Q3 Même question, avec la conique d'équation $3x^2 - y^2 = 6$.

Q4 Pour $k > 0$ fixé et $\lambda \notin \{-1; 0; 1\}$, précisez la nature de la courbe $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ (ellipse ou hyperbole), son axe focal, et calculez le carré e^2 de son excentricité.

Autres exercices

Q1 Soient D une droite et A, B deux points situés dans un même demi-plan ouvert délimité par D. Discutez le nombre de paraboles passant par A et B et dont D est la directrice. (Aleph Géom II 10.56)

Q2 Soient P une parabole de foyer F et D la perpendiculaire en F à l'axe de P. À tout point Ω de P, associons le cercle de centre Ω tangent à D. Montrez que ces cercles sont tous tangenst à un même cercle de centre F. Notons M le point de contact de C et D et M' le point de contact de C et Γ. Montrez que le droite MM' passe par un point I indépendant de M.

Q3 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3. Calculez l'excentricité de la conique d'équation $\dfrac{P(x)-P(y)}{x-y} = 0$. *Réponse* : $\sqrt{2}3$.

Q4 On fixe deux points A et B distincts du plan. Déterminez l'ensemble des points M tels que, H désignant le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) : $\overline{HM}^2 = \overline{HA} \times \overline{HB}$.

Q5 Déterminez les points M de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ tels que la distance de O à la normale en M soit maximale.

Q6 Soient F et F' les foyers d'une ellipse E, M un point de E, P et P' les projetés orthogonaux de F et F' sur la tangente en M à E. (i) quel est le lieu du symétrique orthogonal de F par rapport à la tangente en M ? (ii) quel est le lieu de P ? (iii) prouvez que $\overline{FP} \times \overline{FP'}$ est constant.

Q7 Proposez une CNS portant sur (u, v, w) pour que la droite d'équation $ux+vy+w = 0$ soit tangente à l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Déterminez l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes à cette ellipse, orthogonales l'une à l'autre. Mêmes questions pour une hyperbole.

Q8 Quel est l'ensemble des foyers des hyperboles ayant une asymptote donnée et une directrice donnée ? Quel est le lieu de leurs sommets ?

Q9 Fxons deux points A et F distincts du plan ; quel est l'ensemble des centres O des ellipses dont un foyer est F, et dont le sommet de l'axe focal le plus voisin de F est A ? Soit O un point de cet ensemble ; décrivez la construction des autres sommets de l'ellipse (à la règle et au compas).

Q10 Fixons deux points B et F distincts du plan. Quel est l'ensemble décrit par le second foyer d'une ellipse dont F est le premier foyer, et B une extrémité du petit axe ?

Q11 Construisez les sommets d'une ellipse dont on donne les axes et deux points. Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'une ellipse qui passent par un point fixé ?

Q12 Les foyers F et F' d'une ellipse nous sont donnés ainsi qu'une tangente. Construisez le point de contact.

Q13 Les foyers F et F' et le grand axe $2a$ d'une ellipse nous sont donnés. Construisez les tangentes menées d'un point M, puis les tangentes parallèles à une direction $\mathcal{D}$ donnée. Mêmes questions pour une hyperbole.

---

7 : hyperbole, centre $(1, 2)$, $a = 2$, $b = 3$, $c = \sqrt{13}$, $e = \sqrt{13}/2$; **8** : hyperbole, centre $(1, -2)$, $a = 3/2$, $b = 1$, $c = \sqrt{13}/2$, $e = \sqrt{13}/3$; **9** : réunion de la droite $y = 0$ et de l'hyperbole d'équation $y^2 - 3(x-1)^2 = 1$, $a = 1$, $b = 1/\sqrt{3}$, $c = e = 2/\sqrt{3}$; **10** : hyperbole, centre $(-1, 0)$, axe focal $x = -1$, $a = 2$, $b = 1$, $c = \sqrt{5}$, $e = \sqrt{5}/2$; **11** : ellipse, centre $(0, 1)$, axe focal $x = 0$, $a = 3$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{2}$, $e = 2\sqrt{2}/3$;
