

**Coniques, niveau facile**

- Q1 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $4y^2 + 8x = 52 + x^2$ .
- Q2 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $4y^2 + x^2 = 99 - 2x$ .
- Q3 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $y^2 - 9x^2 = 35 - 6y$ .
- Q4 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $y^2 = 63 + 9x^2 - 2y$ .
- Q5 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $9y^2 - 4x^2 = 41 - 16x$ .
- Q6 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $4y^2 + 8x = 20 - x^2$ .
- Q7 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y + 4 = 0$ .
- Q8 Nature et éléments géométriques de la conique d'équation  $4x^2 - 9y^2 - 8x - 36y - 41 = 0$ .
- Q9 Nature et éléments géométriques de la courbe d'équation  $z^3 - 3z^2 + 4z = \bar{z}^3 - 3\bar{z}^2 + 4\bar{z}$ .
- Q10 Nature et éléments géométriques de la courbe d'équation  $x = e^t + e^{-t} - 1, y = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$ .
- Q11 Nature et éléments géométriques de la courbe décrite par le paramétrage  $x = 2 \cos(t), y = 1 + 3 \sin(t)$ .

**Coniques, niveau moyen**

- Q12 Construisez la courbe d'équation  $16x^2 + 25y|y| + 96x - 256 = 0$ .
- Q13 Construisez la courbe d'équation  $\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$ .
- Q14 Construisez la courbe d'équation  $4x|x| + 9y|y| = 36$  dans un repère orthonormé.
- Q15 Discutez, en fonction de  $m$ , la nature de la courbe d'équation  $2mx^2 - 8mx - (m - 1)y^2 + 12m - 2 = 0$ .
- Q16 Discutez en fonction de  $m \in \mathbb{R}$  la nature et les éléments géométriques (centre, axes) de la conique d'équation  $mx^2 - 6mx + (2 - m)y^2 - 4y(2 - m) + 4m + 9 = 0$ .
- Q17 Soient  $O$  et  $A$  deux points distincts. Déterminez l'ensemble des cercles qui passent par  $A$ , et qui sont vus de  $O$  sous un angle droit (autrement dit : on peut mener, de  $O$ , deux tangentes à ce cercle, perpendiculaires l'une à l'autre).
- Q18 Quel est l'ensemble des foyers des paraboles contenant deux points donnés et dont la directrice est donnée ?
- Q19 Déterminez l'ensemble  $(C)$  des foyers des paraboles passant par un point fixé  $A$  et de directrice  $D$  donnée. Comment se déduit de  $(C)$  l'ensemble  $(E)$  des sommets de ces paraboles ? Prouvez que  $(E)$  est une ellipse privée de l'un de ses sommets ; précisez ses éléments.
- Q20 On connaît le foyer et deux points d'une parabole ; construisez sa directrice.
- Q21 Déterminez l'ensemble des centres des cercles tangents à une droite  $(D)$  donnée et passant par un point fixé  $F$  situé hors de  $D$ . Même question, en remplaçant la droite par un cercle.
- Q22 On fixe un plan  $P$  de l'espace, un point  $F$  situé hors de  $P$ , et un réel  $e > 0$ . Soit  $M$  un point de l'espace, on note  $H$  son projeté orthogonal sur  $P$ . Déterminez l'ensemble des points  $M$  tels que  $MF = eMH$ .
- Q23 Soient  $C$  et  $C'$  deux cercles du plan. Déterminez l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan tels que la somme des distances de  $M$  à  $C$  et  $C'$  soit égale à une constante  $d$  fixée.
- Q24 Déterminez l'ensemble des points du plan d'où l'on voit une parabole donnée sous un angle droit (autrement dit : on peut mener deux tangentes à la parabole, orthogonales entre elles).

## Un exercice donné en DS (Bac C, Paris 1976)

► Le plan affine euclidien est muni d'un repère orthonormé  $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ . Pour  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $k > 0$ , on note  $\mathcal{C}_{\lambda,k}$  la courbe d'équation  $(1 + \lambda)x^2 + (1 - \lambda)y^2 = k$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

- Q1 Étudiez rapidement les courbes  $\mathcal{C}_{0,k}$ ,  $\mathcal{C}_{1,k}$  et  $\mathcal{C}_{-1,k}$ .
- Q2 Montrez que la conique d'équation  $3x^2 + y^2 = 12$  fait partie de la famille des courbes  $\mathcal{C}_{\lambda,k}$ . Précisez tous ses paramètres géométriques, et dessinez cette conique.
- Q3 Même question, avec la conique d'équation  $3x^2 - y^2 = 6$ .
- Q4 Pour  $k > 0$  fixé et  $\lambda \notin \{-1; 0; 1\}$ , précisez la nature de la courbe  $\mathcal{C}_{\lambda,k}$  (ellipse ou hyperbole), son axe focal, et calculez le carré  $e^2$  de son excentricité.

## Autres exercices

- Q1 Soient  $D$  une droite et  $A, B$  deux points situés dans un même demi-plan ouvert délimité par  $D$ . Discutez le nombre de paraboles passant par  $A$  et  $B$  et dont  $D$  est la directrice. (Aleph Géom II 10.56)
- Q2 Soient  $P$  une parabole de foyer  $F$  et  $D$  la perpendiculaire en  $F$  à l'axe de  $P$ . À tout point  $\Omega$  de  $P$ , associons le cercle de centre  $\Omega$  tangent à  $D$ . Montrez que ces cercles sont tous tangents à un même cercle de centre  $F$ . Notons  $M$  le point de contact de  $C$  et  $D$  et  $M'$  le point de contact de  $C$  et  $\Gamma$ . Montrez que la droite  $MM'$  passe par un point  $I$  indépendant de  $M$ .
- Q3 Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré 3. Calculez l'excentricité de la conique d'équation  $\frac{P(x) - P(y)}{x - y} = 0$ . Réponse :  $\sqrt{23}$ .
- Q4 On fixe deux points  $A$  et  $B$  distincts du plan. Déterminez l'ensemble des points  $M$  tels que,  $H$  désignant le projeté orthogonal de  $M$  sur la droite  $(AB)$  :  $\overline{HM}^2 = \overline{HA} \times \overline{HB}$ .
- Q5 Déterminez les points  $M$  de l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tels que la distance de  $O$  à la normale en  $M$  soit maximale.
- Q6 Soient  $F$  et  $F'$  les foyers d'une ellipse  $E$ ,  $M$  un point de  $E$ ,  $P$  et  $P'$  les projetés orthogonaux de  $F$  et  $F'$  sur la tangente en  $M$  à  $E$ . (i) quel est le lieu du symétrique orthogonal de  $F$  par rapport à la tangente en  $M$ ? (ii) quel est le lieu de  $P$ ? (iii) prouvez que  $\overline{FP} \times \overline{FP'}$  est constant.
- Q7 Proposez une CNS portant sur  $(u, v, w)$  pour que la droite d'équation  $ux + vy + w = 0$  soit tangente à l'ellipse d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Déterminez l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes à cette ellipse, orthogonales l'une à l'autre. Mêmes questions pour une hyperbole.
- Q8 Quel est l'ensemble des foyers des hyperboles ayant une asymptote donnée et une directrice donnée? Quel est le lieu de leurs sommets?
- Q9 Fixons deux points  $A$  et  $F$  distincts du plan; quel est l'ensemble des centres  $O$  des ellipses dont un foyer est  $F$ , et dont le sommet de l'axe focal le plus voisin de  $F$  est  $A$ ? Soit  $O$  un point de cet ensemble; décrivez la construction des autres sommets de l'ellipse (à la règle et au compas).
- Q10 Fixons deux points  $B$  et  $F$  distincts du plan. Quel est l'ensemble décrit par le second foyer d'une ellipse dont  $F$  est le premier foyer, et  $B$  une extrémité du petit axe?
- Q11 Construisez les sommets d'une ellipse dont on donne les axes et deux points. Quel est l'ensemble des milieux des cordes d'une ellipse qui passent par un point fixé?
- Q12 Les foyers  $F$  et  $F'$  d'une ellipse nous sont donnés ainsi qu'une tangente. Construisez le point de contact.
- Q13 Les foyers  $F$  et  $F'$  et le grand axe  $2a$  d'une ellipse nous sont donnés. Construisez les tangentes menées d'un point  $M$ , puis les tangentes parallèles à une direction  $\mathcal{D}$  donnée. Mêmes questions pour une hyperbole.

---

**7** : hyperbole, centre  $(1, 2)$ ,  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = \sqrt{13}$ ,  $e = \sqrt{13}/2$ ; **8** : hyperbole, centre  $(1, -2)$ ,  $a = 3/2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{13}/2$ ,  $e = \sqrt{13}/3$ ; **9** : réunion de la droite  $y = 0$  et de l'hyperbole d'équation  $y^2 - 3(x-1)^2 = 1$ ,  $a = 1$ ,  $b = 1/\sqrt{3}$ ,  $c = e = 2/\sqrt{3}$ ; **10** : hyperbole, centre  $(-1, 0)$ , axe focal  $x = -1$ ,  $a = 2$ ,  $b = 1$ ,  $c = \sqrt{5}$ ,  $e = \sqrt{5}/2$ ; **11** : ellipse, centre  $(0, 1)$ , axe focal  $x = 0$ ,  $a = 3$ ,  $b = 2$ ,  $c = 2\sqrt{2}$ ,  $e = 2\sqrt{2}/3$ ;