Sup PCSI2 — TD : cissoïde de Dioclès (École de l'Air, 1983)

► Le plan ponctuel euclidien orienté $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathbf{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **A** est le point de coordonnées (1,0) ; Δ est la droite d'équation $x = 1$; f est la fonction qui, au réel t, associe le point $f(t)$ de coordonnées $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$; Γ est l'arc paramétré $(\mathbb{R}, f)$.

Q1 Quelle est la signification géométrique de t pour le point $f(t)$?

Q2 Étudiez Γ ; vous préciserez la nature du point stationnaire, et celle de la branche infinie. Vous représenterez la partie de Γ constituée des points d'ordonnée non négative, en prenant une unité égale à 10 cm.

Q3 Soit **D** une droite d'équation $ax + by + c = 0$, coupant Γ en trois points **M**, **N** et **P** de paramètres respectifs u, v et w. Déterminez le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines u, v et w.

Q4 Prouvez que les points **M**, **N** et **P** de Γ, de paramètres respectifs u, v et w, sont alignés si et seulement si $uv + vw + wu = 0$.

Q5 Soit **M** un point de Γ, de paramètre $u \neq 0$; la tangente à Γ en ce point recoupe Γ en un point **N** de paramètre v ; explicitez v en fonction de u.

Q6 Soient **M**, **N** et **P** trois points de Γ, de paramètres respectifs u, v et w, alignés sur une droite **D** d'équation $ax + y + c = 0$; les tangentes à Γ en ces points recoupent Γ en trois points **M′**, **N′** et **P′**, de paramètres respectifs u', v' et w'. Prouvez que ces points sont eux aussi alignés sur une droite **D′** dont vous préciserez une équation.

Q7 Une droite **D** de pente $t \neq 0$ passant par **O** recoupe le cercle **C** de diamètre $[\mathbf{O}, \mathbf{A}]$, Γ et Δ respectivement en **M**, **M′** et **N** ; prouver que $\overrightarrow{\mathbf{OM'}} = \overrightarrow{\mathbf{MN}}$. Déterminez l'intersection de la perpendiculaire en **N** à Δ et de la perpendiculaire en **M′** à **D**.

Q8 Notons **F** le symétrique de **A** par rapport à **O**, et Π la parabole de foyer **F** et de directrice Δ. Prouvez que Γ est l'ensemble des projections orthogonales de **F** sur les tangentes à Π. Nous dirons que Γ est la *podaire* de Π par rapport à **F**.