## Juin 1991, séries C et E, La Réunion : le premier exercice !

► A, B, C et D sont quatre points du plan orienté. Sur les côtés du quadrilatère ABCD, on construit les triangles isocèles APB, BQC, CRD et DSA tels que les angles $(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA})$, $(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC})$, $(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC})$ et $(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA})$ aient pour mesure $9\pi/2$. Le but de l'exercice est de prouver que PQRS est un parallélogramme.

$\boxed{\text{Q1}}$ Faites une figure.

► Munissons le plan d'un repère orthonormé direct. Notons $a$, $b$, $c$, $d$, $p$, $q$, $r$ et $s$ les affixes des points considérés.

$\boxed{\text{Q2}}$ Exprimez $p$ en fonction de $a$ et $b$. Donnez de même des expressions de $q$, $r$ et $s$ en fonction de $a$, $b$, $c$ et $d$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Concluez !

## Juin 1991, série C, Inde : le deuxième exercice (adapté)

► $(\mathrm{A}; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé direct. Notons $\mathrm{C} = \mathrm{B} + \mathrm{D} - \mathrm{A}$, $\mathrm{F} = \mathrm{B} + \mathrm{E} - \mathrm{A}$, $\mathrm{H} = \mathrm{D} + \mathrm{E} - \mathrm{A}$ et $\mathrm{G} = \mathrm{F} + \mathrm{H} - \mathrm{E}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Faites un dessin et constatez que ABCDEFGH est un cube. Donnez d'autres expressions de G en fonction des autres points.

► Nous noterons I le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE.

$\boxed{\text{Q2}}$ Vérifiez que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ En déduire l'aire du triangle IGA. Rappel : $\|u \wedge v\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs $u$ et $v$.

$\boxed{\text{Q4}}$ En déduire le volume du tétraèdre ABIG. Rappel : $\left|\mathrm{m}(u, v, w)\right|$ est le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $u$, $v$ et $w$ ; c'est le triple du volume du tétraèdre construit sur ces mêmes vecteurs.

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire la distance du point B au triangle IGA.

## Juin 1987, série E, Paris-Créteil-Versailles : le problème !

► Nous nous proposons de déterminer la section d'un cube par le plan médiateur d'une de ses diagonales, et d'étudier l'effet, sur cette section, de transformations laissant le cube invariant. Nous considérons un cube de centre O, de diagonales [AG], [BH], [CE] et [DF] ; ces diagonales se coupent en leur milieu O. Soient $\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_2$, $\mathrm{M}_3$, $\mathrm{M}_4$, $\mathrm{M}_5$ et $\mathrm{M}_6$ les milieux respectifs des côtés [AB], [BF], [FG], [GH], [HD] et [DA].

$\boxed{\text{Q1}}$ Faites une figure !

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que les point $\mathrm{M}_i$ appartiennent tous au plan médiateur $\Pi$ du segment [CE]. Vérifiez que ce plan coupe le cube suivant l'hexagone $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5\mathrm{M}_6$, que vous ferez apparaître sur la figure.

$\boxed{\text{Q3}}$ Notons $\sigma$ la symétrie centrale de centre O. Montrez que $\Pi$ est invariant par $\sigma$ ; déterminez les images par $\sigma$ des $\mathrm{M}_i$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Soit $s$ la réflexion qui échange A et F. Déterminez les images par $s$ des sommets du cube.

$\boxed{\text{Q5}}$ Même question avec la réflexion $s'$ qui échange A et H.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $r = s' \circ s$ est une rotation d'axe CE, et que $\Pi$ est invariant par $r$. Déterminez les images par $r$ des sommets du cube. Que pouvez-vous dire de $r \circ r \circ r$ ?

► Soit $\rho$ la rotation du plan $\Pi$ induite par $r$. Orientons $\Pi$ ; soit $\varphi$ une mesure de l'angle de $\rho$, telle que $0 < \varphi < 2\pi$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Quelles sont les valeurs possibles de $\varphi$ ? En déduire que $\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3$ et $\mathrm{M}_4\mathrm{M}_5\mathrm{M}_6$ sont des triangles équilatéraux de centre O.

$\boxed{\text{Q8}}$ Concluez !