Sup PCSI2 — Exercices : courbes paramétrées

Étude et construction des arcs paramétrés :

Q1 $x = \sin t$, $y = \dfrac{\sin t}{2+\cos t}$. $\qquad x = \dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1-t^2}$. $\qquad x = \dfrac{3t}{1+t^3}$, $y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$.

Q2 $x = \dfrac{t+1}{t(t-1)}$, $y = \dfrac{t(t+1)}{t-1}$. $\qquad x = \cos^3 t$, $y = \sin^3 t$. $\qquad x = 2\cos t + \cos 2t$, $y = 2\sin t - \sin 2t$.

Q3 $x = \cos^2 t$, $y = \cos t(1+\sin t)$. $\qquad x = \cos t$, $y = \dfrac{\sin^2 t}{2+\sin t}$.

Q4 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = t^2+2t$, $y = \dfrac{2t}{1-t^2}$.
• Précisez le point double et les intersections avec les asymptotes.

Q5 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = \dfrac{t^2}{t-1}$, $y = \dfrac{t}{t^2-1}$.
• Précisez le point double et les intersections avec les asymptotes.

Q6 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = t^2+2t$, $y = 2t - \dfrac{1}{t^2}$.
• Précisez le point double, la nature du point stationnaire, et le point d'intersection de la courbe et de la tangente en son point stationnaire.

Q7 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = t+t^2-t^3$, $y = t^2+t^3-t^5$.
• Précisez le point double, la nature du point stationnaire. Soit $\mathcal{D}_\lambda$ la droite de pente λ passant par le point $A(1,1)$; déterminez les paramètres des points d'intersection de $\mathcal{D}_\lambda$ et de la courbe ; précisez les tangentes que l'on peut mener de A.

Q8 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = \dfrac{t}{1-t^2}$, $y = \dfrac{t(1-2t^2)}{1-t^2}$.
• Écrivez une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de paramètre t. On considère un point $P(\lambda,\lambda)$ de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$; prouvez que l'on peut, en général, mener de P deux tangentes à $\mathcal{C}$ autres que $\mathcal{D}$.
• On note M' et M'' les points de contact avec $\mathcal{C}$ de ces deux tangentes, et on pose $u = -\frac{1}{\lambda}$; exprimez les coordonnées du milieu I de $[M', M'']$ en fonction de u ; quel est le lieu géométrique de I quand P décrit $\mathcal{D}$?

Q9 • Construisez la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^3}{1+t^2}$.
• Une droite rencontre $\mathcal{C}$ en trois points A, B, C ; les tangentes en ces points recoupent $\mathcal{C}$ en trois points I, J, K. Prouvez que I, J, K sont alignés.

Q10 Soit Γ la courbe paramétrée par $\big(x = \cos^2 t, y = \sin t \cos t, z = \sin t\big)$. Construisez les projections de Γ sur : le plan d'équation $z = 0$; le plan d'équation $x = 0$; le plan d'équation $x = y$. Prouvez que Γ est l'intersection de la sphère Σ centrée en O et de rayon 1, et d'un cylindre C de révolution que vous préciserez. Faites un dessin soigné montrant Γ, Σ et C.