PCSI2 — Exercices : intégrales curvilignes

► Rappel : l'intégrale de $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ le long d'un arc $([a,b],f)$ simple de classe $\mathcal{C}^1$ est

$$\int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t)\big)x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)y'(t)\Big)\,dt$$

où x et y sont les composantes de la fonction f. La circulation d'un champ de vecteurs $\vec{V}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un arc $([a,b],\gamma)$ est $\displaystyle\int_a^b \vec{V}\big(\gamma(t)\big)\cdot\vec{\gamma}'(t)\,dt$.

Q1 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = \sin(y)dx + x\cos(y)dy$ le long de l'arc constitué par la succession des segments ABet BC, où $A = (0,0)$, $B = (1,2)$ et $C = (2,2)$. Réponse : $2\sin(2)$.

Q2 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = xy^2dy - yx^2dx$ le long du cercle d'équation $x^2+y^2-2y = 0$ parcouru dans le sens direct. Réponse : $3\pi/2$.

Q3 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = xydx+(x+y)dy$ le long de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$, x variant de -1 à 2. Réponse : 69/4.

Q4 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = -xy^2dx + x^2ydy$ le long de la demi-cardioïde d'équation polaire $r = a\big(1+\cos(\theta)\big)$, θ variant de 0 à π. Réponse : $64a^4/15$.

Q5 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = x^2dy + y^2dx$ le long de la demi-ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$, $y \geqslant 0$, décrite dans le sens rétrograde. Réponse : 8/3.

Q6 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = (x^2-y)dx + (y^2-x)dy$ le long de la boucle de la courbe d'équation cartésienne $x^3+y^3-3xy = 0$, décrite dans le sens direct. Vous pourrez utiliser un paramétrage, en coupant la courbe par une droite passant par l'origine ; ou bien expliciter une primitive de ω. Réponse : 0.

Q7 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = (y^3-6xy^2)dx + (3xy^2-6x^2y)dy$ le long du segment AB parcouru de A vers B, avec $A = (1,2)$ et $B = (3,4)$ puis sur l'un des demi-cercles de diamètre AB, également parcouru de A vers B. Réponse : -236.

Q8 Calculez la circulation de la forme différentielle $\omega = \dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2}$ sur le cercle centré en O et de rayon r. Pourquoi le résultat est-il non nul, alors que l'arc sur lequel on intègre est fermé ? Le résultat serait-il différent si l'on calculait la circulation de la même forme sur le contour du carré $ABCD$, où $A = (1,1)$, $B = (-1,1)$, $C = (-1,-1)$ et $D = (1,-1)$?