PCSI2 : quelques calculs d'éuivalents

D'après une interrogation du 28/1/2009

$A = \dfrac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{1+\sqrt{2x^3}}$.

Utilisons la formule $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$:

$$A = \frac{(2x+1)-(x+1)}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x}\big(\sqrt{2+1/x}+\sqrt{1+1/x}\big)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{2}}$$

Par ailleurs, $1+2\sqrt{2x^3} \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x\sqrt{2x}$. Donc $A \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x\sqrt{2}\big(1+\sqrt{2}\big)} = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}}}$

$B = \dfrac{\ln(x^2+1)-\ln(x^2+2)}{x^3}$.

$\ln(x^2+1) = 2\ln(x) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + x^{-2} + o(x^{-2})$; de même $\ln(x^2+2) = 2\ln(x) + 2x^{-2} + o(x^{-2})$.
Donc $\ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) = -x^{-2} + o(x^{-2})$.

Finalement $\boxed{B \underset{x\to+\infty}{\sim} -x^{-5}}$

$C = \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x}}{\ln(x+1)+\ln(x^2+2)}$.

Reprenons la formule de l'exercice A : $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-x} = \dfrac{1+x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-x}{2x} = \dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, $\ln(x+1)+\ln(x^2+2) = \ln(x) + o(1) + 2\ln(x) + o(1) = 3\ln(x) + o(1)$.

Donc $\boxed{C \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{6\ln(x)}}$.

$D = e^{-5} \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 10} e^{kx}$.

Chacun des neuf premiers termes de la somme est négligeable devant le dernier ; donc $\boxed{D \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(10x-5)}$.

$E = \dfrac{\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{3-e^{-x}}}$.

La formule de l'exercice A nous donne $\sqrt{1+e^x}-\sqrt{1+e^{2x}} = \dfrac{e^x-e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}+\sqrt{1+e^{2x}}}$.

Mais $e^x - e^{2x} \underset{x\to+\infty}{\sim} -e^{2x}$ et $\sqrt{1+e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x/2}$ est négligeable devant $\sqrt{1+e^{2x}} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^x$.

Comme $\sqrt{3-e^{-x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sqrt{3}$, nous concluons : $\boxed{E \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-e^x}{\sqrt{3}}}$.

$F = \dfrac{\sqrt{x+2\ln(x)}-\sqrt{x-\ln(x)}}{1+\ln(x)+\ln^2(x)}$.

Encore la formule de l'exercice A : $\sqrt{x+2\ln(x)}-\sqrt{x-\ln(x)} = \dfrac{3\ln(x)}{\sqrt{x+2\ln(x)}+\sqrt{x-\ln(x)}}$.

Mais $\sqrt{x+2\ln(x)} = \sqrt{x}\times\sqrt{1+2\ln(x)/x} = \sqrt{x}\big(1+o(1)\big)$ et de même $\sqrt{x-\ln(x)} = \sqrt{x}\times\big(1+o(1)\big)$.
Donc $\sqrt{x+2\ln(x)}+\sqrt{x-\ln(x)} = \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$. Il est clair que $1+\ln(x)+\ln^2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln^2(x)$.

Finalement $\boxed{F \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2\sqrt{x}\ln(x)}}$

$G = \dfrac{\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4+2}}{\sqrt{2x^3-x^2}}$. La formule de l'exercice A nous donne :

$$\sqrt{x^4+1}-\sqrt{x^4+2} = \frac{-1}{\sqrt{x^4+1}+\sqrt{x^4+2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$$

Par ailleurs $\sqrt{2x^3-x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2x^3}$.

Donc $G \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2x^2\sqrt{2x^3}} = \boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{8x^7}}}$.

$H = \dfrac{\ln(x^2+x^4)-\ln(x^8-x^5)}{\ln(2x)\ln(3x^2)}$.
$\ln(x^2+x^4) = 4\ln(x)+\ln(1+x^{-2}) = 4\ln(x)+o(1)$; de même $\ln(x^8-x^5) = 8\ln(x)+o(1)$. Donc $\ln(x^2+x^4)-\ln(x^8-x^5) \underset{x\to+\infty}{\sim} -4\ln(x)$. D'autre part, $\ln(2x) = \ln(x)+\ln(2) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$ et de même $\ln(3x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

Finalement $\boxed{H \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{\ln(x)}}$.

$I = \dfrac{\ln(x^3)\ln(x^7)}{\ln(2+x^2)\ln(3+x^3)}$.
$\ln(x^3)\ln(x^7) = 21\ln^2(x)$. D'autre part, $\ln(x^2+2) = 2\ln(x)+\ln(1+2x^{-2}) = 2\ln(x)+o(1)$ et de même $\ln(3+x^3) = 3\ln(x)+o(1)$. Donc $\ln(x^2+2)\ln(3+x^3) \underset{x\to+\infty}{\sim} 6\ln^2(x)$.

Finalement $\boxed{I \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{7}{2}}$.

$J = \dfrac{\mathrm{ch}(x)-\mathrm{ch}(2x)}{\mathrm{sh}(2x)-\mathrm{sh}(3x)}$.
$\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = \dfrac{e^x}{2}+o(1)$; de même $\mathrm{ch}(2x) = \dfrac{e^{2x}}{2}+o(1)$, $\mathrm{sh}(2x) = \dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2} = \dfrac{e^{2x}}{2}+o(1)$ et $\mathrm{sh}(3x) = \dfrac{e^{3x}}{2}+o(1)$.

Donc $\boxed{J \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}}$.

$K = x^{-50}\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 100} x^k$.

Les 99 premiers termes de la somme sont négligeables devant le dernier, donc $\boxed{K \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{50}}$.

$L = \dfrac{\mathrm{sh}(x)-\mathrm{sh}(2x)}{\mathrm{ch}(2x)-\mathrm{ch}(3x)}$.
Le calcul se mène comme celui de la question J ; il vient $\boxed{L \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x}}$.
