

D'après une interrogation du 28/1/2009

$$A = \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt{2x^3}}.$$

Utilisons la formule $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$:

$$A = \frac{(2x+1) - (x+1)}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}} = \frac{x}{\sqrt{x}(\sqrt{2+1/x} + \sqrt{1+1/x})} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{2}}$$

Par ailleurs, $1 + 2\sqrt{2x^3} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x\sqrt{2x}$. Donc $A \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x\sqrt{2}(1 + \sqrt{2})} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{x\sqrt{2}}}$

$$B = \frac{\ln(x^2+1) - \ln(x^2+2)}{x^3}.$$

$\ln(x^2+1) = 2\ln(x) + \ln(1+1/x^2) = 2\ln(x) + x^{-2} + o(x^{-2})$; de même $\ln(x^2+2) = 2\ln(x) + 2x^{-2} + o(x^{-2})$.
Donc $\ln(x^2+1) - \ln(x^2+2) = -x^{-2} + o(x^{-2})$.

Finalement $\boxed{B \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^{-5}}$

$$C = \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x}}{\ln(x+1) + \ln(x^2+2)}.$$

Reprenons la formule de l'exercice A : $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-x} = \frac{1+x}{\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-x}{2x} = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, $\ln(x+1) + \ln(x^2+2) = \ln(x) + o(1) + 2\ln(x) + o(1) = 3\ln(x) + o(1)$.

Donc $\boxed{C \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{6\ln(x)}}$.

$$D = e^{-5} \sum_{1 \leq k \leq 10} e^{kx}.$$

Chacun des neuf premiers termes de la somme est négligeable devant le dernier ; donc $\boxed{D \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(10x-5)}$.

$$E = \frac{\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1+e^{2x}}}{\sqrt{3-e^{-x}}}.$$

La formule de l'exercice A nous donne $\sqrt{1+e^x} - \sqrt{1+e^{2x}} = \frac{e^x - e^{2x}}{\sqrt{1+e^x} + \sqrt{1+e^{2x}}}$.

Mais $e^x - e^{2x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -e^{2x}$ et $\sqrt{1+e^x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x/2}$ est négligeable devant $\sqrt{1+e^{2x}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^x$.

Comme $\sqrt{3-e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{3}$, nous concluons : $\boxed{E \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-e^x}{\sqrt{3}}}$.

$$F = \frac{\sqrt{x+2\ln(x)} - \sqrt{x-\ln(x)}}{1 + \ln(x) + \ln^2(x)}.$$

Encore la formule de l'exercice A : $\sqrt{x+2\ln(x)} - \sqrt{x-\ln(x)} = \frac{3\ln(x)}{\sqrt{x+2\ln(x)} + \sqrt{x-\ln(x)}}$.

Mais $\sqrt{x+2\ln(x)} = \sqrt{x} \times \sqrt{1+2\ln(x)/x} = \sqrt{x}(1+o(1))$ et de même $\sqrt{x-\ln(x)} = \sqrt{x} \times (1+o(1))$.

Donc $\sqrt{x+2\ln(x)} + \sqrt{x-\ln(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{x}$. Il est clair que $1 + \ln(x) + \ln^2(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln^2(x)$.

Finalement $\boxed{F \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3}{2\sqrt{x}\ln(x)}}$

$G = \frac{\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4+2}}{\sqrt{2x^3-x^2}}$. La formule de l'exercice A nous donne :

$$\sqrt{x^4+1} - \sqrt{x^4+2} = \frac{-1}{\sqrt{x^4+1} + \sqrt{x^4+2}} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2}$$

Par ailleurs $\sqrt{2x^3-x^2} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{2x^3}$.

Donc $G \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2x^2\sqrt{2x^3}} = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{8x^7}}}$.

$$H = \frac{\ln(x^2+x^4) - \ln(x^8-x^5)}{\ln(2x)\ln(3x^2)}$$

$\ln(x^2+x^4) = 4\ln(x) + \ln(1+x^{-2}) = 4\ln(x) + o(1)$; de même $\ln(x^8-x^5) = 8\ln(x) + o(1)$. Donc $\ln(x^2+x^4) - \ln(x^8-x^5) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -4\ln(x)$. D'autre part, $\ln(2x) = \ln(x) + \ln(2) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$ et de même $\ln(3x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(x)$.

Finalement $\boxed{H \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2}{\ln(x)}}$.

$$I = \frac{\ln(x^3)\ln(x^7)}{\ln(2+x^2)\ln(3+x^3)}$$

$\ln(x^3)\ln(x^7) = 21\ln^2(x)$. D'autre part, $\ln(x^2+2) = 2\ln(x) + \ln(1+2x^{-2}) = 2\ln(x) + o(1)$ et de même $\ln(3+x^3) = 3\ln(x) + o(1)$. Donc $\ln(x^2+2)\ln(3+x^3) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 6\ln^2(x)$.

Finalement $\boxed{I \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{7}{2}}$.

$$J = \frac{\text{ch}(x) - \text{ch}(2x)}{\text{sh}(2x) - \text{sh}(3x)}$$

$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x}{2} + o(1)$; de même $\text{ch}(2x) = \frac{e^{2x}}{2} + o(1)$, $\text{sh}(2x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2} = \frac{e^{2x}}{2} + o(1)$ et

$\text{sh}(3x) = \frac{e^{3x}}{2} + o(1)$.

Donc $\boxed{J \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}}$.

$$K = x^{-50} \sum_{1 \leq k \leq 100} x^k$$

Les 99 premiers termes de la somme sont négligeables devant le dernier, donc $\boxed{K \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^{50}}$.

$$L = \frac{\text{sh}(x) - \text{sh}(2x)}{\text{ch}(2x) - \text{ch}(3x)}$$

Le calcul se mène comme celui de la question J ; il vient $\boxed{L \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x}}$.
