Exercice 1

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^{2n} + x^n + 3x - 1$.

Q1 Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution, que nous noterons x_n.

Q2 Explicitez x_1.

Q3 Prouvez l'inégalité $x_n < \dfrac{1}{3}$.

Q4 Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

Q5 Montrez que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Que pouvez-vous dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q6 Déterminez la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Q7 Saurez-vous trouvez un équivalent *simple* de $y_n = \ln(\ell - x_n)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 2 (EDHEC 1995, voie éco)

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^5 + nx - 1$.

Q1 Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution réelle, que nous noterons x_n.

► Nous nous intéressons désormais à la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2 Donnez un encadrement très simple de x_n.

Q3 Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Q4 Montrez que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ; que pouvez-vous dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q5 Calculez $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)$; quelle est la valeur de ℓ ?

Q6 Proposez une autre méthode pour déterminer ℓ.

Q7 Donnez un équivalent simple de x_n lorsque n tend vers l'infini.

Q8 Justifiez la relation $x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\left(\dfrac{1}{n^6}\right)$ lorsque n tend vers l'infini.

Q9 Si possible, donnez un développement asymptotique de x_n à trois termes.

Exercice 3

► Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^{n+1} + x^n + 2x - 1$.

Q1 Montrez que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ possède dans $\mathbb{R}_+$ une unique solution, que l'on notera x_n.

Q2 Explicitez x_1.

Q3 Prouvez l'inégalité $x_n < \dfrac{1}{2}$.

Q4 Quel est le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$?

Q5 Montrez que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Que peut-on dire, pour l'instant, de sa limite ℓ ?

Q6 Déterminez la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Q7 Saurez-vous trouvez un équivalent *simple* de $y_n = \ln(\ell - x_n)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Exercice 4 : la suite de terme général $\sqrt[n]{n}$

▶ Nous nous intéressons à la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$, avec $n \geqslant 1$. Rappelons que la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la bijection réciproque de la fonction $x \geqslant 0 \mapsto x^n$. À ce titre, elle est strictement croissante.

Q1 Comparez u_2 et u_3.

Q2 Comparez u_3 et u_4.

▶ Nous allons montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement monotone. Nous noterons $v_n = (n+1)^n$ et $w_n = n^{n+1}$.

Q3 Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Justifiez la majoration $\binom{n}{k} \leqslant n^k$.

Q4 En déduire la majoration $(n+1)^n \leqslant (n+1)n^n$.

▶ La majoration précédente ne permet pas encore de conclure.

Q5 Pour $n \geqslant 3$, prouvez l'inégalité $\binom{n}{2} n^{n-2} + \binom{n}{3} n^{n-3} < n^n$.

Q6 En déduire le signe de $v_n - w_n$, pour $n \geqslant 3$.

Q7 En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

Q8 Quels sont les indices n tels que $u_n \in \mathbb{N}$?

Q9 Montrez que la suite de terme général $u_n = \sqrt[n]{n}$ converge. À ce stade, que pouvez-vous dire de sa limite ℓ ?

▶ Supposons $\ell > 1$ et notons $h = \ell - 1$.

Q10 Pour $n \geqslant 2$, montrez l'inégalité $(1+h)^n \geqslant \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$.

Q11 Mettez en évidence une contradiction et concluez !

Exercice 5

▶ Notez bien que, dans cet exercice, ${u_n}^2$ désigne le carré de u_n, et non le terme d'indice n^2 de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q1 Montrez que la donnée de $u_0 = 1$ et la relation $u_{n+1} = u_n + \dfrac{2}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite de réels. Vous utiliserez un raisonnement par récurrence.

Q2 Dressez un tableau donnant les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4. Vous présenterez les résultats sous forme de fractions irréductibles ; les calculs ne devront pas apparaître sur la copie.

Q3 Étudiez le sens de variation de cette suite.

Q4 Notre suite converge-t-elle ?

Q5 Calculez $\lim\limits_{n\to\infty} \left({u_{n+1}}^2 - {u_n}^2\right)$.

▶ Notons $v_n = \dfrac{{u_n}^2}{4}$.

Q6 Justifiez la majoration $v_{n+1} - v_n > 1$.

Q7 En déduire $v_n > n$.

Q8 Pour $n \geqslant 1$, établissez $v_{n+1} - v_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$.

Q9 Pour $n \geqslant 2$, justifiez : $\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$.

Q10 Toujours pour $n \geqslant 2$, en déduire la majoration $v_n \leqslant n + \ln(n) + 2$.

Q11 En déduire la limite, quand n tend vers l'infini, de $\dfrac{v_n}{n}$.

Q12 Exhibez $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{\lambda n^\alpha} = 1$.