Exercice 1

Q1 • f_n est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), strictement croissante puisque $f_n'(x) = 2nx^{2n-1} + nx^{n-1} + 3 > 0$ pour $x \geqslant 0$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $\big[f(0), \lim_{+\infty} f\big[= [-1, +\infty[$. En particulier, f_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$, ce qui revient à dire que sur cet intervalle, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution.

Q2 • $f_1(x) = x^2 + 4x - 1$. Le discriminant du trinôme f_1 est $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 20 = \big(2\sqrt{5}\big)^2 > 0$; donc l'équation $f_1(x) = 0$ possède deux solutions réelles $u = \dfrac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5}$ et $v = \dfrac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = -2 + \sqrt{5}$. Mais $u < 0$: donc $\boxed{x_1 = -2 + \sqrt{5} \approx 0.36}$.

Q3 • $f_n(1/3) = (1/3)^{2n} + (1/3)^n > 0 = f_n(x_n)$; comme f_n est strictement croissante, ceci implique $x_n < 1/3$.

Q4 • Nous allons comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$. Nous avons $0 \leqslant x_n < 1/3$, donc ${x_n}^{2n+2} < {x_n}^{2n}$ et ${x_n}^{n+1} < {x_n}^n$; nous en déduisons :

$$f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{2n+2} + {x_n}^{n+1} + 3x_n - 1 < {x_n}^{2n} + {x_n}^n + 3x_n - 1 = f_n(x_n) = 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$$

Ainsi $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$; comme f_{n+1} est strictement croissante, nous en déduisons $x_n < x_{n+1}$. Concluons : $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement croissante}}$.

Q5 • La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, et majorée par $1/3$. Elle converge donc, et sa limite ℓ est au plus égale à $1/3$. Remarque : comme la suite est croissante et à termes strictement positifs, nous pouvons aussi affirmer que ℓ est strictement positif.

Q6 • Montrons que $\boxed{\text{la suite converge vers } 1/3}$. Il suffit d'écrire l'équation satisfaite par x_n sous la forme $x_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{{x_n}^{2n} + {x_n}^n}{3}$. Comme $0 < x_n < 1/3$, nous pouvons affirmer que ${x_n}^{2n}$ et ${x_n}^n$ tendent tous deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, ce qui donne le résultat désiré.

Q7 • $\ln(\ell - x_n) = \ln(1/3 - x_n) = \ln \dfrac{{x_n}^{2n} + {x_n}^n}{3} = n\ln(x_n) + \ln \dfrac{{x_n}^n + 1}{3}$. De $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1/3$, nous déduisons $n\ln(x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -n\ln(3)$. Par ailleurs, $\ln \dfrac{{x_n}^n + 1}{3}$ est borné, donc négligeable devant $n\ln(x_n)$. Conclusion : $\boxed{\ln(\ell - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -n\ln(3)}$.

Exercice 2 (EDHEC 1995, voie éco)

Q1 f_n est continue, dérivable, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, en tant que fonction polynôme. $f_n'(x) = 5x^4 + n$ est strictement positif pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De $f_n(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} x^5$, on déduit $\lim_{\pm\infty} f_n = \pm\infty$. Ainsi, f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même ; en particulier, elle s'annule une fois et une seule, en un point de $\mathbb{R}$ qui est donc l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

Q2 Remarquons que $f_n(0) = -1 < 0$ tandis que $f_n(1) = 1 + n - 1 = n > 0$, donc (théorème des valeurs intermédiaires) f_n s'annule dans l'intervalle $]0, 1[$: ainsi, $0 < x_n < 1$.

Q3 $f_{n+1}(x_n) = {x_n}^5 + (n+1)x_n - 1 = {x_n}^5 + nx - 1 + x_n = f_n(x_n) + x_n = x_n > 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, nous en déduisons $x_n > x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Q4 La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0. Elle converge donc, et sa limite ℓ appartient à l'intervalle $[0, 1]$.

Q5 • $f_n\Big(\dfrac{1}{n}\Big) = \dfrac{1}{n^5} + \dfrac{n}{n} - 1 = \dfrac{1}{n^5} > 0$ donc $x_n < 1/n$. Comme $x_n > 0$, le théorème des trois suites permet d'affirmer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 : $\boxed{\ell = 0}$.

• Autres méthodes : $0 < x_n = \dfrac{1 - {x_n}^5}{n} < \dfrac{1}{n}$ et on conclut avec le théorème des trois suites. Ou encore : $\ell > 0$ mène à une contradiction puisque $1 - {x_n}^5 = \mathcal{O}(1)$, tandis que $nx_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Q6 $nx_n = 1 - {x_n}^5$, donc $x_n = \dfrac{1 - {x_n}^5}{n}$. Comme $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, nous en déduisons $\boxed{x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$.

Q7 Avec le résultat précédent, il vient : $x_n - \dfrac{1}{n} = \dfrac{nx_n - 1}{n} = \dfrac{-{x_n}^5}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{n^6}$, donc $\boxed{x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\Big(\dfrac{1}{n^6}\Big)}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Notons $\varepsilon_n = x_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^6}$. Nous savons que $\varepsilon_n = o\Big(\dfrac{1}{n^6}\Big)$. Alors :

$$\begin{aligned}
{x_n}^5 = 1 - nx_n &\iff \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \varepsilon_n\Big)^5 = 1 - n\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \varepsilon_n\Big) \\
&\iff \frac{1}{n^5} + \underbrace{\frac{5}{n^4}\Big(\varepsilon_n - \frac{1}{n^6}\Big)}_{\underset{n\to\infty}{\sim} -5/n^{10}} + \underbrace{\sum_{2\leqslant k\leqslant 5} \binom{5}{k} \Big(\varepsilon_n - \frac{1}{n^6}\Big)^k \Big(\frac{1}{n}\Big)^{5-k}}_{= o(1/n^{10})} = \frac{1}{n^5} - n\varepsilon_n
\end{aligned}$$

Conclusion : $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{5}{n^{11}}$ et donc $\boxed{x_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + \dfrac{5}{n^{11}} + o\Big(\dfrac{1}{n^{11}}\Big)}$.

Exercice 3

$\boxed{\text{Q1}}$ • f_n est continue (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$), strictement croissante puisque $f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} + 2 > 0$ pour $x \geqslant 0$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $\big[f(0), \lim\limits_{+\infty} f\big[= [-1, +\infty[$. En particulier, f_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$, ce qui revient à dire que sur cet intervalle, l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution.

$\boxed{\text{Q2}}$ • $f_1(x) = x^2 + 3x - 1$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 3^2 - 4\cdot 1\cdot(-1) = 13 > 0$, donc il possède deux racines réelles $u = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}$ et $v = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2}$. Mais $u < 0$; donc $\boxed{x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \approx 0.30}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • $f_n(1/2) = 2^{-n-1} + 2^{-n} > 0 = f_n(x_n)$; comme f_n est strictement croissante, ceci implique $x_n < 1/2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • $f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{n+2} + {x_n}^{n+1} + 2x_n - 1 = x_n({x_n}^{n+1} + {x_n}^n) + 2x_n - 1$; mais $f_n(x_n) = 0$, soit ${x_n}^{n+1} + {x_n}^n + 2x_n - 1 = 0$, ou encore ${x_n}^{n+1} + {x_n}^n = 1 - 2x_n$. Nous en déduisons $f_{n+1}(x_n) = (1-x_n)(2x_n - 1) < 0$ puisque $x_n < 1/2$. Mais $0 = f_{n+1}(x_{n+1})$; comme f_{n+1} est strictement croissante, ceci implique $x_n < x_{n+1}$: la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

$\boxed{\text{Q5}}$ • La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante, et majorée par $1/2$. Elle converge donc, et sa limite ℓ est au plus égale à $1/2$. Comme la suite est à termes strictement positifs, nous pouvons affirmer que ℓ est strictement positif.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Montrons que la suite converge vers $1/2$. Il suffit d'écrire l'équation satisfaite par x_n sous la forme $x_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{{x_n}^{n+1} + {x_n}^n}{2}$. Comme $0 < x_n < 1/2$, nous pouvons affirmer que ${x_n}^{n+1}$ et ${x_n}^n$ tendent tous deux vers 0 lorsque n tend vers l'infini, ce qui donne le résultat désiré.

$\boxed{\text{Q7}}$ • $\ln(\ell - x_n) = \ln(1/2 - x_n) = \ln\Big(\dfrac{{x_n}^{n+1} + {x_n}^n}{2}\Big) = n\ln(x_n) + \ln\Big(\dfrac{1+x_n}{2}\Big)$. Mais $\ln\Big(\dfrac{1+x_n}{2}\Big) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\Big(\dfrac{3}{4}\Big)$, donc est négligeable devant $n\ln(x_n)$, qui est lui-même équivalent à $-n\ln(2)$. Il ne reste plus qu'à conclure : $\boxed{\ln(\ell - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} -n\ln(2)}$.

Exercice 4 : la suite de terme général $\sqrt[n]{n}$

$\boxed{\text{Q1}}$ $u_2 = \sqrt[2]{2}$ et $u_3 = \sqrt[3]{3}$. Comparons les puissances sixièmes de ces deux nombres : $(u_2)^6 = 2^3 = 8$ et $(u_3)^6 = 3^2 = 9$; comme $x \geqslant 0 \mapsto x^6$ est strictement croissante, nous en déduisons $\boxed{u_2 < u_3}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ $u_4 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{\sqrt{2^2}} = \sqrt{2} = u_2$. Donc $\boxed{u_4 < u_3}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \leqslant n(n-1)\dots(n-k+1) \leqslant n^k$ puisque le dernier produit compte k facteurs compris entre 1 et n.

$\boxed{\text{Q4}}$ Avec la formule du binôme et la majoration précédente, nous avons :

$$(n+1)^n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} 1^k n^{n-k} \leqslant \sum_{0\leqslant k\leqslant n} n^k n^{n-k} = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} n^n = (n+1)n^n$$

$\boxed{\text{Q5}}$ Utilisons les inégalités évidentes $n - 1 \leqslant n$ et $(n-1)(n-2) \leqslant n^2$ pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned}
\binom{n}{2} n^{n-2} + \binom{n}{3} n^{n-3} &= \frac{n(n-1)}{2} n^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} n^{n-3} \\
&\leqslant \frac{n^2}{2} n^{n-2} + \frac{n^3}{6} n^{n-3} = \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\Big) n^n = \frac{2}{3} n^n < n^n
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Majorons v_n :

$$\begin{aligned} v_n = (n+1)^n &= \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} n^{n-k} \\ &= \underbrace{\binom{n}{0} n^n + \binom{n}{1}\cdot n^{n-1} + \binom{n}{2} n^{n-2} + \binom{n}{3} n^{n-3} + \sum_{4\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} n^{n-k}}_{S} \end{aligned}$$

Les deux premiers termes de l'expression S sont égaux à n^n. La somme des deux suivants est *strictement* majorée par n^n, d'après la question 5. Enfin, les $n-3$ termes de la somme sont tous majorés par n^n, d'après le résultat de la question 4. Ainsi, $v_n < n\cdot n^n = n^{n+1} = w_n$. Conclusion : $v_n < w_n$, soit $\boxed{v_n - w_n < 0}$ pour $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Pour $n \geqslant 3$, nous avons $v_n < w_n$, soit $(n+1)^n < n^{n+1}$; comme la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \sqrt[n(n+1)]{x}$ est strictement croissante, nous en déduisons $\sqrt[n+1]{n+1} \leqslant \sqrt[n]{n}$, soit $u_{n+1} < u_n$:

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement décroissante.}}$$

$\boxed{\text{Q8}}$ $u_1 = 1 \in \mathbb{N}$. Pour $n \geqslant 2$, nous avons $u_n > 1$ et $u_n \leqslant u_3 < 2$ (puisque $(u_3)^3 = 3 < 8 = 2^3$). Donc u_1 est le seul terme de la suite appartenant à $\mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ La suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée par 1 ; elle converge donc vers une limite $\ell \geqslant 1$. Il en est donc de même de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. Nous pouvons ajouter que $\ell \leqslant u_3$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Utilisons encore la formule du binôme : en tant que somme de termes positifs, $(1+h)^n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \binom{n}{k} h^k 1^{n-k}$ majore chacun de ses termes, en particulier celui d'indice 2. Ceci nous donne $(1+h)^n \geqslant \binom{n}{2} h^2$ soit précisément :

$$\boxed{(1+h)^n \geqslant \frac{n(n-1)h^2}{2}}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Nous avons signalé l'inégalité $u_n \geqslant \ell$ pour $n \geqslant 3$; nous avons donc $(u_n)^n \geqslant (1+h)^n$. L'inégalité de la question 10 et la relation $(u_n)^n = n$ nous donnent $n \geqslant \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$ soit $1 \geqslant \dfrac{(n-1)h^2}{2}$ puisque $n > 0$. Mais ceci est contradictoire puisque $\dfrac{(n-1)h^2}{2} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Donc $\boxed{\ell = 1}$.

Exercice 5

$\boxed{\text{Q1}}$ • Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathcal{A}(n)$ l'assertion suivante :

« on peut calculer u_n, et u_n est strictement positif »

• Nous allons établir que cette assertion est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, au moyen d'un raisonnement par récurrence.

• $\mathcal{A}(0)$ est vraie, puisque l'on nous donne $u_0 = 1$.

• Supposons $\mathcal{A}(n)$ acquise ; alors $u_n \neq 0$, si bien que nous pouvons calculer u_{n+1} ; et, comme u_n est strictement positif, $\dfrac{2}{u_n}$ l'est aussi, de même que u_{n+1} ; ceci établit $\mathcal{A}(n+1)$.

• Par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la question est terminée.

$\boxed{\text{Q2}}$ • Nous obtenons $u_1 = 3$, $u_2 = 11/3$, $u_3 = 139/33$ et $u_4 = 21499/4587$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{u_n} > 0$ donc $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement croissante}}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, sa limite ℓ devrait vérifier $\ell = \ell + \dfrac{2}{\ell}$ (en vertu du théorème de composition) ce qui est clairement contradictoire ! Ainsi, cette suite diverge ; comme elle est croissante, nous pouvons même affirmer que $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ • ${u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 = \left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)^2 - {u_n}^2 = {u_n}^2 + 4 + \dfrac{4}{{u_n}^2} - {u_n}^2 = 4 + \dfrac{4}{{u_n}^2}$;. Nous venons de voir que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$; donc $\boxed{{u_{n+1}}^2 - {u_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 4}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Avec le calcul effectué à la question précédente, il vient $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}^2}{4} - \dfrac{{u_n}^2}{4} = 1 + \dfrac{1}{{u_n}^2} > 1$

$\boxed{\text{Q7}}$ • Avec un télescopage :

$$v_n = v_0 + \sum_{0 \leqslant k < n} (v_{k+1} - v_k) > v_0 + \sum_{0 \leqslant k < n} 1 = v_0 + n$$

Mais $v_0 = \dfrac{{u_0}^2}{4} = \dfrac{1}{4} > 0$, donc $v_n > n$.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Nous avons vu en Q6 que $v_{n+1} - v_n = 1 + \dfrac{1}{{u_n}^2}$; il nous suffit alors d'établir $\dfrac{1}{{u_n}^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$, soit ${u_n}^2 \geqslant n$. Or $u_1 = u_0 + \dfrac{2}{u_0} = 3$ et, avec un télescopage :

$$ {u_n}^2 = {u_1}^2 + \sum_{1 \leqslant k < n} \left({u_{k+1}}^2 - {u_k}^2\right) = 9 + \sum_{1 \leqslant k < n} \left(4 + \frac{4}{{u_k}^2}\right) \geqslant 9 + \sum_{1 \leqslant k < n} 4 = 9 + 4(n-1) = 4n + 5 \geqslant n$$

$\boxed{\text{Q9}}$ • Pour $n \geqslant 2$, la fonction $t \in [n-1, n] \mapsto \dfrac{1}{t}$ est décroissante, donc $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{t}$ pour tout $t \in [n-1, n]$. En intégrant, il vient $\dfrac{1}{n} \leqslant \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{dt}{t}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ • Pour $n \geqslant 2$, il vient, avec le résultat de Q8 et un autre télescopage :

$$v_n = v_2 + \sum_{2 \leqslant k < n} (v_{k+1} - v_k) \leqslant v_2 + \sum_{2 \leqslant k < n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = v_2 + n - 2 + \sum_{2 \leqslant k < n} \frac{1}{k}$$

Mais, avec le résultat de Q9 et la relation de Chasles :

$$\sum_{2 \leqslant k < n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{2 \leqslant k < n} \left(\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}\right) = \int_{1}^{n-1} \frac{dt}{t} = \big[\ln(|t|)\big]_{t=1}^{t=n-1} = \ln(n-1) < \ln(n)$$

$u_2 = u_1 + \dfrac{2}{u_1} = 3 + \dfrac{2}{3} = \dfrac{11}{3}$, donc $v_2 = \dfrac{{u_2}^2}{4} = \dfrac{121}{36}$. Finalement :

$$v_n \leqslant \frac{121}{36} + n - 2 + \ln(n) = n + \ln(n) + \frac{49}{36} \leqslant n + \ln(n) + 2$$

$\boxed{\text{Q11}}$ • Pour $n \geqslant 2$, nous avons établi l'encadrement $n \leqslant v_n \leqslant n + \ln(n) + 2$; nous en déduisons $1 \leqslant \dfrac{v_n}{n} \leqslant 1 + \dfrac{\ln(n) + 2}{n}$. Mais $\dfrac{\ln(n) + 2}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ (par raisons de croissances comparées) ; avec le théorème des trois suites, nous pouvons conclure : $\boxed{\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{v_n}{n} = 1}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ • Comme u_n est strictement positif, nous pouvons écrire $u_n = 2\sqrt{v_n}$; or $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{v_n}{n}} = 1$, donc $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2\sqrt{v_n}}{2\sqrt{n}} = 1$, soit $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{2\sqrt{n}} = 1$. Ainsi, $\boxed{\lambda = 2 \text{ et } \alpha = \frac{1}{2}}$ conviennent.

Source : Sup. de Co. Paris 1989, voie éco, Maths III, exercice 2.