$\boxed{\text{Sup PCSI 2 — TD : limites et continuité}}$

Rappels

- Toute partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure (resp. inférieure).
- Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite majorée lorsque $f(I)$ est une partie de $\mathbb{R}$ majorée ; ceci revient à dire qu'il existe un réel M tel que $f(x) \leqslant M$ pour tout $x \in I$. La fonction f possède alors une borne supérieure notée $\sup\limits_I f$, ou $\sup\limits_{x\in I} f(x)$.
- Les notions de « fonction minorée » et de « borne inférieure d'une fonction minorée » sont définies de façon analogue.
- Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Mise en route

$\boxed{\text{Q1}}$ Voici une liste de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: exp ; sin ; arctan. Pour chacune de ces fonctions, répondre aux questions suivantes :
- la fonction est-elle minorée ?
- si la fonction est minorée, atteint-elle sa borne inférieure ?
- la fonction est-elle majorée ?
- si la fonction est majorée, atteint-elle sa borne supérieure ?

Partie I

- Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Proposez une fonction simple vérifiant ces hypothèses.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez qu'il existe A tel que $x \leqslant A$ implique $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez qu'il existe B tel que $x \geqslant B$ implique $f(x) \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Précisez les places respectives de A et B.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que la restriction de f à $]-\infty, B]$ est bornée.

$\boxed{\text{Q7}}$ Montrez que f possède une borne inférieure m.

$\boxed{\text{Q8}}$ Donnez un exemple de fonction f répondant aux conditions de l'énoncé, et telle que m soit atteinte.

$\boxed{\text{Q9}}$ Donnez un exemple de fonction f répondant aux conditions de l'énoncé, et telle que m ne soit pas atteinte.

$\boxed{\text{Q10}}$ Dans cette question, nous supposons f strictement croissante. Combient vaut m ? m est-elle atteinte ?

Partie II

- Soit $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que g possède en $-\infty$ et en $+\infty$ des limites ℓ_- et ℓ_+ (finies).

$\boxed{\text{Q11}}$ Proposez une fonction simple (non constante) vérifiant ces hypothèses.

$\boxed{\text{Q12}}$ En vous inspirant des méthodes utilisées dans la partie précédente, montrez que g est bornée.

- Dans la suite, nous notons m (resp. M) la borne inférieure (resp. supérieure) de g.

$\boxed{\text{Q13}}$ Placez les réels m et M par rapport aux réels ℓ_- et ℓ_+.

$\boxed{\text{Q14}}$ Donnez un exemple de fonction g telle qu'aucune des deux bornes ne soit atteinte.

$\boxed{\text{Q15}}$ Donnez un exemple de fonction g telle qu'une et une seule des deux bornes soit atteinte.

$\boxed{\text{Q16}}$ Donnez un exemple de fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle qu'une et une seule des deux bornes soit atteinte.

$\boxed{\text{Q17}}$ Donnez un exemple de fonction g telle que les deux bornes soient atteintes.

$\boxed{\text{Q18}}$ Que peut-on dire lorsque $\ell_- = \ell_+$?