Le coin des spécialistes

Q1 Soient a et b deux réels strictement positifs, vérifiant $a > b > 0$. Étudiez la suite de terme général $u_n = (a^n + b^n)^{1/n}$; indication : distinguez trois cas, selon la place de a par rapport à b. Même question avec la suite de terme général $v_n = (a^{-n} + b^{-n})^{-1/n}$.

Q2 Notons s_n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2^{2^n} ; par exemple ; $2^{2^4} = 2^{16} = 65536$ donc $s_4 = 5$. Donnez une expression simple de s_n au moyen des fonctions « logarithme » et « partie entière » ; étudiez la suite de terme général $\dfrac{s_{n+1}}{s_n}$.

Sommes et limites

Q3 Étudiez les suites de T.G. respectifs : $s_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+2)^2 - 1}$ $\qquad x_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n}(2k-1)}{\sum_{k=1}^{n} k}$ $\qquad y_n = n^2 \dfrac{\sum_{k=1}^{n} k}{\sum_{k=1}^{n} k^3}$

Q4 Déterminez la limite de la suite de terme général $u_n = \left(2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{3}{4}\cos(n)\right)^n$. Indication : ne vous laissez pas impressionner.

Q5 Rappel : la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{k!}$ converge vers e. Étudiez la convergence des suites de termes généraux respectifs $a_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{k}{k!}$, $b_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{k^2}{k!}$ et $c_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} \frac{k^3}{k!}$.

Q6 Déterminez des réels a, b, c et d tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n^2 + 9n + 5}{(n+1)(2n+3)(2n+5)(n+4)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{2n+3} + \frac{c}{2n+5} + \frac{d}{n+4}$$

En déduire la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2 + 9k + 5}{(k+1)(2k+3)(2k+5)(k+4)}$.

Q7 Pour $x \geqslant 0$, établissez $1 - x \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$. Montrez que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Q8 Pour $x \geqslant 0$, établissez $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$. Étudiez alors la suite de terme général $v_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$. Indication : transformez ce produit en somme, au moyen de la fonction logarithme. Peut-on résoudre cet exercice avec le théorème de convergence des sommes de Riemann ?

Q9 Étudiez la suite de terme général $w_n = \displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(1 + \frac{k^2}{n^3}\right)$. Indications : transformez le produit en somme, et utilisez un encadrement de $\ln(1+x)$.

---

1 : a et b ; **2** : $\dfrac{s_{n+1}}{s_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$; **4** : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; **6** : $\frac{2}{9}$; **8** : $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt{e}$; **9** : $w_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \sqrt[3]{e}$;
