Comparaison de suites

Q1 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs diverge vers $+\infty$. Les suites de termes généraux respectifs $v_n = u_{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$ et $w_n = \sqrt{u_n}$ sont-elles équivalentes ?

Q2 Des suites de termes généraux respectifs $x_n = n^{\ln(n)}$ et $y_n = \big(\ln(n)\big)^n$, laquelle est négligeable devant l'autre ?

Q3 $\star$ (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels. On sait que (u_n) diverge vers $+\infty$ et que $u_n = o(v_n)$. Montrez qu'il existe une suite (y_n) telle que $u_n = o(y_n)$ et $y_n = o(v_n)$.

Q4 $\star$ La suite (u_n) est monotone, et on peut en extraire au moins une suite convergente. La suite (u_n) converge-t-elle nécessairement ?

Q5 Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_n = \mathcal{O}(n^2)$ lorsque n tend vers l'infini. Que pouvez-vous dire de la suite de terme général $s_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k$?

Q6 $\star$ Les suites (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0,1]$ et vérifient $u_nv_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. Montrez que les deux suites convergent vers 1.

Q7 $\star$ (u_n) est une suite de complexes. Les suites de T.G. respectifs $(u_n)^2$ et $(u_n)^3$ convergent. Montrez que (u_n) converge. Qu'en est-il si $(u_n)^5$ et $(u_n)^{13}$ convergent ? Et si $(u_n)^8$ et $(u_n)^{24}$ convergent ?

Suites extraites

Q8 $\star$ Montrez que, de toute suite convergente, on peut extraire une suite monotone.

Q9 $\star\star$ Soit (x_n) une suite de réels, qui converge vers ℓ et vérifie la propriété suivante : il existe une infinité de termes distincts de ℓ. Montrez que l'on peut extraire de (x_n) une suite strictement monotone.

Convergence ou divergence

Q10 $\star\star$ La suite de terme général u_n vérifie $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$ et n'est pas majorée. Que pouvez-vous en déduire ?

Q11 La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ diverge. Peut-on en déduire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} {u_k}^2$ diverge ?

Q12 La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Peut-on en déduire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} {u_k}^2$ converge ?

Q13 La suite (u_n) converge vers 0. Peut-on en déduire que la suite de T.G. $\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$ converge ?

Q14 La suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$ converge. Peut-on en déduire que la suite de T.G. nu_n converge vers 0 ?

Calculs d'équivalents

Q15 Donnez un équivalent *simple* de $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$ quand $n \to \infty$.

Q16 Donner un équivalent *simple* de $\sqrt{n^2+1}$ lorsque $n \to \infty$. Déterminer la limite ℓ de $u_n = \cos\big(2\pi\sqrt{n^2+1}\big)$, puis donner un équivalent *simple* de $\ell - u_n$ lorsque $n \to \infty$.

Q17 Donnez un équivalent simple de chacune des quantités suivantes, lorsque n tend vers l'infini : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $b_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$; $c_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$; $d_n = n^{1/n} - 1$; $f_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

---

1 : NON ; **2** : $x_n = o(y_n)$; **5** : $s_n = \mathcal{O}(n^3)$; **10** : (u_n) diverge vers $+\infty$; **11** : FAUX : prendre $u_n = 1/n$; **12** : FAUX : prendre $u_n = (-1)^n n^{-1/4}$; **13** : FAUX : prendre $u_n = \ln(n)$; **14** : FAUX : prendre $u_n = (-1)^n/n$; **15** : $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$;