

Comparaison de suites

- Q1 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs diverge vers $+\infty$. Les suites de termes généraux respectifs $v_n = u_{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ et $w_n = \sqrt{u_n}$ sont-elles équivalentes ?
- Q2 Des suites de termes généraux respectifs $x_n = n^{\ln(n)}$ et $y_n = (\ln(n))^n$, laquelle est négligeable devant l'autre ?
- Q3 ★ (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels. On sait que (u_n) diverge vers $+\infty$ et que $u_n = o(v_n)$. Montrez qu'il existe une suite (y_n) telle que $u_n = o(y_n)$ et $y_n = o(v_n)$.
- Q4 ★ La suite (u_n) est monotone, et on peut en extraire au moins une suite convergente. La suite (u_n) converge-t-elle nécessairement ?
- Q5 Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $u_n = \mathcal{O}(n^2)$ lorsque n tend vers l'infini. Que pouvez-vous dire de la suite de terme général $s_n = \sum_{0 \leq k \leq n} u_k$?
- Q6 ★ Les suites (u_n) et (v_n) sont à valeurs dans $[0, 1]$ et vérifient $u_n v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Montrez que les deux suites convergent vers 1.
- Q7 ★ (u_n) est une suite de complexes. Les suites de T.G. respectifs $(u_n)^2$ et $(u_n)^3$ convergent. Montrez que (u_n) converge. Qu'en est-il si $(u_n)^5$ et $(u_n)^{13}$ convergent ? Et si $(u_n)^8$ et $(u_n)^{24}$ convergent ?

Suites extraites

- Q8 ★ Montrez que, de toute suite convergente, on peut extraire une suite monotone.
- Q9 ★★ Soit (x_n) une suite de réels, qui converge vers ℓ et vérifie la propriété suivante : il existe une infinité de termes distincts de ℓ . Montrez que l'on peut extraire de (x_n) une suite strictement monotone.

Convergence ou divergence

- Q10 ★★ La suite de terme général u_n vérifie $u_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$ et n'est pas majorée. Que pouvez-vous en déduire ?
- Q11 La suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k$ diverge. Peut-on en déduire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k^2$ diverge ?
- Q12 La suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k$ converge. Peut-on en déduire que la suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k^2$ converge ?
- Q13 La suite (u_n) converge vers 0. Peut-on en déduire que la suite de T.G. $\sum_{k=1}^n \frac{u_k}{k}$ converge ?
- Q14 La suite de terme général $\sum_{k=0}^n u_k$ converge. Peut-on en déduire que la suite de T.G. nu_n converge vers 0 ?

Calculs d'équivalents

- Q15 Donnez un équivalent *simple* de $u_n = \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1$ quand $n \rightarrow \infty$.
- Q16 Donner un équivalent *simple* de $\sqrt{n^2+1}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Déterminer la limite ℓ de $u_n = \cos(2\pi\sqrt{n^2+1})$, puis donner un équivalent *simple* de $\ell - u_n$ lorsque $n \rightarrow \infty$.
- Q17 Donnez un équivalent simple de chacune des quantités suivantes, lorsque n tend vers l'infini : $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$; $b_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$; $c_n = \ln(n+1) - \ln(n-1)$; $d_n = n^{1/n} - 1$; $f_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$ où $a > 0$ et $b > 0$.

1 : NON ; 2 : $x_n = o(y_n)$; 5 : $s_n = \mathcal{O}(n^3)$; 10 : (u_n) diverge vers $+\infty$; 11 : FAUX : prendre $u_n = 1/n$; 12 : FAUX : prendre $u_n = (-1)^n n^{-1/4}$; 13 : FAUX : prendre $u_n = \ln(n)$; 14 : FAUX : prendre $u_n = (-1)^n/n$; 15 : $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\ln(n)}$;