Mini-problème

► Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les relations $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = -x_n + 2y_n$ et $z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n$.

Q1 Donnez l'expression de x_n en fonction de n seul.

Q2 Soit $u_n = \dfrac{y_n}{x_n}$. Donnez l'expression de u_n en fonction de n seul, puis celle de y_n.

Q3 Soit $v_n = \dfrac{z_n}{x_n}$. Donnez l'expression de v_n en fonction de n seul, puis celle de z_n.

Un mini-problème

Q1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvez que l'équation $\operatorname{cotan}(x) = \ln(x)$ possède dans l'intervalle $]n\pi, (n+1)\pi[$ une et une seule solution, que nous noterons u_n.

Q2 Expliquez pourquoi $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n\pi$.

Q3 Déterminez $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} (u_n - n\pi)$.

Q4 Donnez un équivalent simple de $v_n = u_n - n\pi - \ell$ quand $n \to \infty$.

Mini-problème

► Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0, 1[$, et $v_0 \in\ ]0, 1[$.

Q1 Montrez que la relation $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{1 + u_n v_n}$ définit **effectivement** une suite de réels $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Q2 Cette suite est-elle monotone ? Est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Mini-problème

► Soient $a > 0$, $b > 0$ et $n \geqslant 2$.

Q1 Montrez que l'équation $x^n = ax + b$ possède une et une seule solution positive, qui sera notée u_n.

Q2 Étudiez la convergence et la limite de la suite (u_n).

Q3 Donnez un équivalent simple de $u_n - 1$ lorsque n tend vers l'infini.

Mini-problème

► Nous nous intéressons à la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{2n + 2k - 1}$, où $n \geqslant 1$.

Q1 Étudiez la monotonie de cette suite.

Q2 Montrez que cette suite converge.

Q3 Proposez un encadrement de la limite de cette suite.

Q4 En utilisant des sommes de Riemann, déterminez la limite de cette suite.

Q5 Retrouvez le résultat précédent, en utilisant le développement asymptotique $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.