Sup PCSI2 — Exercices : suites (1)

S'assurer qu'une suite est bien définie

Q1 À partir de quel rang peut-on définir la suite de terme général $x_n = (\ln \circ \ln \circ \ln \circ \ln)(n)$? Vous pouvez utiliser une calculatrice.

Q2 Peut-on parler de la suite de réels de terme général $\sqrt{n - \sqrt{n^3 - \sqrt{n^5}}}$? Si non, combien de termes cette formule permet-elle de calculer ?

Q3 Montrez que les relations $u_0 = a > 0$, $u_1 = b > 0$ et $u_{n+2} = \dfrac{1 + u_{n+1}}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite de réels. Explicitez les six premiers termes...

Q4 Montrez que les relations $u_0 = 5/8$ et $u_{n+1} = \dfrac{1 + 3u_n}{2 + u_n}$ définissent *effectivement* une suite de réels. Qu'en est-il si l'on prend $u_0 = -5/8$?

Q5 Les relations $u_0 = 2010!$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)$ définissent-elles une suite de réels ? Indication : avec une calculatrice, regardez ce qui se passe lorsque $u_0 = 10$, puis lorsque $u_0 = 10^{88}$.

Mise en route

Q6 Étudiez la monotonie des suites de T.G. $a_n = n - \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} 2^{-k}$, $b_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$, $c_n = \dfrac{n!}{2^{n+1}}$ et $d_n = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{(-1)^k}{k+1}$.

Q7 Jean-Maurice MALENCONTREUX affirme que la suite de terme général $\dfrac{7^n + 9^n}{\pi^{2n}}$ est majorée APCR. Que pensez-vous de cette affirmation ?

Q8 Pour chacune des suites énumérées ci-dessous, donnez le rang à partir duquel elle est définie, et dites si elle est : majorée, minorée, croissante (ou au moins APCR), décroissante (ou au moins décroissante APCR), stationnaire, périodique (ou au moins périodique APCR), convergente.

$a_n = n^3 - 17n^2 - 5n \quad b_n = 2^n - 3^n \quad c_n = (-1)^n n \quad d_n = \sin(n\pi/6) \quad e_n = \sqrt{n^2 - 7n + 11} - \sqrt{13n}$

$f_n = \ln(n) + (-1)^n \quad g_n = \dfrac{n^2 - n + 1}{n^2 + 3n + 1} \quad h_n = \dfrac{7n}{\lfloor n^2/91 \rfloor}$

Q9 Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = \dfrac{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (5 + 2n)}{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (4 + 3n)}$. La suite (u_n) est-elle monotone ? Converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ? Indication : observez $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

Q10 Montrez que, si la suite de réels (u_n) converge, l'ensemble des termes de la suite possède un plus petit élément, ou un plus grand élément, ou les deux. Donnez des exemples où l'on a en même temps PGE et PPE.

Q11 Montrez que, si la suite de réels (u_n) diverge vers $+\infty$, l'ensemble des termes de la suite possède un PPE.

Q12 La suite de réels (u_n) est bornée. Possède-t-elle un plus grand élément ? Se peut-il qu'elle ne possède, ni plus petit élément, ni plus grand élément ?

Q13 Une suite à termes positifs converge vers 0. Est-elle nécessairement décroissante APCR ?

Q14 Une suite de réels diverge vers $+\infty$. Est-elle nécessairement croissante APCR ?

Q15 Donnez un exemple de suite de réels bornée, à termes deux à deux distincts, et dont on peut extraire une suite strictement croissante et une suite strictement décroissante.

Q16 $\star\star$ Construisez une suite de réels qui n'est ni croissante, ni décroissante, ni majorée, ni minorée (même APCR).

---

1 : 16 ; **2** : 3 ; **7** : VRAI ;