► Nous nous proposons de calculer la limite de la suite de terme général

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \cos\Big(\frac{(k+1)\pi}{n}\Big)$$

Nous utiliserons la formule $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$. En remplaçant a par $\dfrac{k\pi}{n}$ et b par $\dfrac{(k+1)\pi}{n}$, il vient :

$$T_n = \frac{1}{2n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(\sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{n}\Big) + \sin\Big(-\frac{\pi}{n}\Big)\right) = \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\Big(\frac{(2k+1)\pi}{n}\Big)}_{U_n} - \underbrace{\frac{1}{2n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\Big(\frac{\pi}{n}\Big)}_{V_n}$$

Observons que $V_n = \sin\Big(\dfrac{\pi}{n}\Big)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Occupons-nous maintenant de U_n : c'est « presque » une somme de Riemann, en ce sens que les $\xi_k = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}$ sont tous dans $[0, 2\pi]$, sauf le dernier, qui est $\xi_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{n}$ et que nous noterons plutôt ξ_0.

Mais nous voyons facilement que $\sin(\xi_n) = \sin\Big(\dfrac{(2n+1)\pi}{n}\Big) = \sin\Big(\dfrac{\pi}{n}\Big)$.

Pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, notons $\varphi_k = \dfrac{(2k-1)\pi}{n}$. Alors U_n peut s'écrire :

$$U_n = \frac{1}{2n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin\Big(\frac{(2k-1)\pi}{n}\Big) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sin(\varphi_k)$$

Donc U_n est une somme de Riemann relative à la fonction $f : t \in [0,1] \mapsto \sin(2\pi t)$, au partage du segment $[0,1]$ à pas constant $\dfrac{2\pi}{n}$ et au choix « médian » φ_k. Comme f est continue, nous pouvons affirmer que la suite de terme général U_n converge, et que sa limite est $\displaystyle\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = \Big[-\frac{\cos(2\pi t)}{2\pi}\Big]_0^1$, qui est clairement nulle.

Finalement, la suite de terme général T_n converge vers 0.