Q1 Soient p et q deux rationnels. Montrez que l'intervalle $]p, q[$ contient au moins un irrationnel.

Q2 Soient p et q deux irrationnels. Montrez que l'intervalle $]p, q[$, il contient au moins un rationnel.

Q3 Prouvez l'inégalité $\sqrt{|a-b|} \geqslant \left|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\right|$.

Q4 Prouvez l'inégalité $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.

Q5 a, b, c et d sont quatre réels qui vérifient $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = ab + bc + cd + da$. Montrez que a, b, c et d ont la même valeur.

Q6 Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvez l'inégalité $\sqrt[n]{n} < 3$, puis l'inégalité $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$.

Q7 Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Établissez l'inégalité $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leqslant \dfrac{a+b+c}{2}$. Quand a-t-on l'égalité ?

Q8 Prouvez l'inégalité $1 + |ab-1| \leqslant \big(1 + |a-1|\big) \times \big(1 + |b-1|\big)$.

Q9 a, b et c sont trois réels strictement positifs. Montrez que, parmi les réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$, un au moins est au plus égal à $1/4$.

Q10 $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $\left(\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k\right) \times \left(\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

Q11 $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $\displaystyle\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} (1 + x_k) \geqslant 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

Q12 Calculez les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $E = \left\{(-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Q13 Montrez que $\displaystyle\bigcup_{n \geqslant 2} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ est un intervalle que vous expliciterez.

Q14 Déterminez les bornes de $E = \left\{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Q15 Déterminez les bornes de $E = \left\{\dfrac{1 + (-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Q16 Soit $E = \left\{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \;\middle|\; (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminez $\inf(E)$ et $\sup(E)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

Q17 A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées. Prouvez que $A \cup B$ est bornée. Prouvez les relations $\inf(A \cup B) = \min\big(\inf(A), \inf(B)\big)$ et $\sup(A \cup B) = \max\big(\sup(A), \sup(B)\big)$.

Q18 A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées. Notons $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Prouvez que $A + B$ est bornée. Prouvez les relations $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Q19 Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Justifiez l'existence de $\delta(A) = \sup\big\{|x - y| \mid x \in A \text{ \underline{et} } y \in A\big\}$. Prouvez que $\delta(A) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$, puis que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.