$\boxed{\text{Q1}}$ Soient p et q deux rationnels. Montrez que l'intervalle $]p,q[$ contient au moins un irrationnel.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soient p et q deux irrationnels. Montrez que l'intervalle $]p,q[$, il contient au moins un rationnel.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez l'inégalité $\sqrt{|a-b|} \geqslant \big|\sqrt{|a|} - \sqrt{|b|}\big|$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez l'inégalité $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$.

$\boxed{\text{Q5}}$ a, b, c et d sont quatre réels qui vérifient $a^2+b^2+c^2+d^2 = ab+bc+cd+da$. Montrez que a, b, c et d ont la même valeur.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvez l'inégalité $\sqrt[n]{n} < 3$, puis l'inégalité $\sqrt{n} < \sqrt[n]{n!}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soient a, b et c trois réels strictement positifs. Établissez l'inégalité $\dfrac{ab}{a+b} + \dfrac{bc}{b+c} + \dfrac{ca}{c+a} \leqslant \dfrac{a+b+c}{2}$. Quand a-t-on l'égalité ?

$\boxed{\text{Q8}}$ Prouvez l'inégalité $1 + |ab-1| \leqslant \big(1+|a-1|\big) \times \big(1+|b-1|\big)$.

$\boxed{\text{Q9}}$ a, b et c sont trois réels strictement positifs. Montrez que, parmi les réels $a(1-b)$, $b(1-c)$, $c(1-a)$, un au moins est au plus égal à $1/4$.

$\boxed{\text{Q10}}$ $x_1, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $\left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k\right) \times \left(\sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \dfrac{1}{x_k}\right) \geqslant n^2$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

$\boxed{\text{Q11}}$ $x_1, \dots, x_n$ sont des réels strictement positifs. Prouvez l'inégalité $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (1+x_k) \geqslant 1 + \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$. Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

$\boxed{\text{Q12}}$ Calculez les bornes inférieure et supérieure de l'ensemble $E = \left\{(-1)^n\left(1-\dfrac{1}{n}\right) \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

$\boxed{\text{Q13}}$ Montrez que $\bigcup\limits_{n\geqslant 2} \left[\dfrac{1}{n}, 1-\dfrac{1}{n}\right]$ est un intervalle que vous expliciterez.

$\boxed{\text{Q14}}$ Déterminez les bornes de $E = \left\{\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

$\boxed{\text{Q15}}$ Déterminez les bornes de $E = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

$\boxed{\text{Q16}}$ Soit $E = \left\{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \;\middle|\; (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\right\}$. Déterminez $\inf(E)$ et $\sup(E)$. Ces bornes sont-elles atteintes ?

$\boxed{\text{Q17}}$ A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées. Prouvez que $A \cup B$ est bornée. Prouvez les relations $\inf(A\cup B) = \min\big(\inf(A), \inf(B)\big)$ et $\sup(A\cup B) = \max\big(\sup(A), \sup(B)\big)$.

$\boxed{\text{Q18}}$ A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et bornées. Notons $A + B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Prouvez que $A+B$ est bornée. Prouvez les relations $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$ et $\sup(A+B) = \sup(A) + \sup(B)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Soit A une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$. Justifiez l'existence de $\delta(A) = \sup\big\{|x-y| \mid x \in A \ \underline{\text{et}}\ y \in A\big\}$. Prouvez que $\delta(A) \leqslant \sup(A) - \inf(A)$, puis que $\delta(A) = \sup(A) - \inf(A)$.