PCSI2 : QCM sur les fonctions

Première série

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Voici des assertions au sujet de f. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

Q1 Si $|f|$ est continue sur I, alors f est continue sur I.

Q2 Si $|f|$ est lipschitzienne sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Q3 Si $|f|$ est dérivable sur I, alors f est dérivable sur I.

Q4 Si f est dérivable sur I, alors f possède des primitives sur I.

Q5 Si f possède des primitives sur I, alors f est dérivable sur I.

Q6 Si f est dérivable sur I et s'annule au moins deux fois, alors f' s'annule au moins une fois.

Q7 Si f est dérivable sur I et si f' s'annule au moins une fois, alors f s'annule au moins deux fois.

Q8 Si f est dérivable sur I et si f' s'annule au moins deux fois, alors f s'annule au moins une fois.

Deuxième série

Q1 Rappelez la définition d'une fonction lipschitzienne sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Voici des assertions au sujet de f. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

Q2 Si f et g sont lipschitziennes sur I, alors $f+g$ est lipschitzienne sur I.

Q3 Si f est lipschitzienne sur I, alors f est continue sur I.

Q4 Si f est continue sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Q5 Si f est lipschitzienne sur I, alors f est dérivable sur I.

Q6 Si f est dérivable sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Q7 Si f est dérivable sur I et si I est borné, alors f est lipschitzienne sur I.

Q8 Si f est dérivable sur I et si f' est lipschitzienne sur I, alors f est lipschitzienne sur I.

Q9 $\star\star$ Si f est dérivable et lipschitzienne sur I, alors f' est lipschitzienne sur I.

Troisième série

- f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Voici des assertions au sujet de f et g. Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

Q1 Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\big|f(x)\big| \underset{x\to+\infty}{\sim} \big|g(x)\big|$.

Q2 Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\big(f(x)\big)^2 \underset{x\to+\infty}{\sim} \big(g(x)\big)^2$.

Q3 Si $f(x) \underset{+\infty}{=} o\big(g(x)\big)$, alors $\exp\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{=} o\Big(\exp\big(g(x)\big)\Big)$.

Q4 Si $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\big(g(x)\big)$, alors $\exp\big(f(x)\big) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}\Big(\exp\big(g(x)\big)\Big)$.

Q5 Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\exp\big(f(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp\big(g(x)\big)$.

Q6 Si f et g sont à valeurs strictement positives et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\ln\big(f(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\big(g(x)\big)$.

Q7 Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\ln\big(f(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln\big(g(x)\big)$.

Q8 Si f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $f'(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g'(x)$.

Q9 $\star\star$ Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^x g(t)\,dt$.