

### Première série

► Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Voici des assertions au sujet de  $f$ . Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

- Q1 Si  $|f|$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .
- Q2 Si  $|f|$  est lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q3 Si  $|f|$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- Q4 Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  possède des primitives sur  $I$ .
- Q5 Si  $f$  possède des primitives sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- Q6 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et s'annule au moins deux fois, alors  $f'$  s'annule au moins une fois.
- Q7 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  s'annule au moins une fois, alors  $f$  s'annule au moins deux fois.
- Q8 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  s'annule au moins deux fois, alors  $f$  s'annule au moins une fois.

### Deuxième série

Q1 Rappelez la définition d'une fonction lipschitzienne sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

► Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f$  une fonction de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Voici des assertions au sujet de  $f$ . Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

- Q2 Si  $f$  et  $g$  sont lipschitziennes sur  $I$ , alors  $f + g$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q3 Si  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est continue sur  $I$ .
- Q4 Si  $f$  est continue sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q5 Si  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est dérivable sur  $I$ .
- Q6 Si  $f$  est dérivable sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q7 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $I$  est borné, alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q8 Si  $f$  est dérivable sur  $I$  et si  $f'$  est lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f$  est lipschitzienne sur  $I$ .
- Q9 ★★ Si  $f$  est dérivable et lipschitzienne sur  $I$ , alors  $f'$  est lipschitzienne sur  $I$ .

### Troisième série

►  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Voici des assertions au sujet de  $f$  et  $g$ . Pour chacune d'elles, il vous faut dire si elle est vraie (preuve détaillée à l'appui) ou fausse (en exhibant un contre-exemple).

- Q1 Si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $|f(x)| \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} |g(x)|$ .
- Q2 Si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $(f(x))^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} (g(x))^2$ .
- Q3 Si  $f(x) \underset{+\infty}{=} o(g(x))$ , alors  $\exp(f(x)) \underset{+\infty}{=} o(\exp(g(x)))$ .
- Q4 Si  $f(x) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(g(x))$ , alors  $\exp(f(x)) \underset{+\infty}{=} \mathcal{O}(\exp(g(x)))$ .
- Q5 Si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $\exp(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \exp(g(x))$ .
- Q6 Si  $f$  et  $g$  sont à valeurs strictement positives et si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(g(x))$ .
- Q7 Si  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(g(x))$ .
- Q8 Si  $f$  et  $g$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , et si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $f'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g'(x)$ .
- Q9 ★★ Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $\mathbb{R}$  et si  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$ , alors  $\int_0^x f(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \int_0^x g(t) dt$ .