► (u_n) est une suite de réels. Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, preuve(s) à l'appui !

Convergence et domination

Q1 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $u_n = \mathcal{O}(1/n)$.

Q2 Si $u_n = \mathcal{O}(1)$ alors $\exp(u_n) = \mathcal{O}(1)$.

Q3 Si $\exp(u_n) = \mathcal{O}(1)$ alors $u_n = \mathcal{O}(1)$.

Q4 Si $u_n = \mathcal{O}(1)$ alors $\sin(u_n) = \mathcal{O}(1)$.

Q5 Si $\sin(u_n) = \mathcal{O}(1)$ alors $u_n = \mathcal{O}(1)$.

Q6 Si $u_n = \mathcal{O}(1)$ alors $\arctan(u_n) = \mathcal{O}(1)$.

Q7 Si $\arctan(u_n) = \mathcal{O}(1)$ alors $u_n = \mathcal{O}(1)$.

Opérations et équivalents

Q8 Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

Q9 Si les suites (u_n) et (v_n) conergent respectivement vers ℓ et ℓ', et si $\ell < \ell'$, alors $u_n \leqslant v_n$ APCR.

Q10 ⋆ Une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels vérifie $w_n + w_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$. A-t-on nécessairement $w_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$?

Q11 ⋆⋆ Une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels est décroissante, et vérifie $x_n + x_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Montrez que l'on a nécessairement $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

En vrac

Q12 Si (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $\dfrac{1}{u_n + v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Q13 Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, alors $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$.

Q14 Si (u_n) n'est pas majorée, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Q15 Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors on peut extraire de (u_n) une suite décroissante.

Q16 Si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors la suite de terme général $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ converge.

Q17 Si (u_n) est à termes positifs et vérifie $\dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Q18 Si (u_n) et (v_n) sont à termes strictement positifs et vérifient $\dfrac{u_n + v_n}{u_n v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.

Q19 Si $u_n + v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et ${u_n}^2 - {v_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

Q20 Si ${u_n}^2 + {v_n}^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (on suppose que u et v sont des suites de réels).

Q21 Si ${u_n}^{200} + {v_n}^{200} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (on suppose que u et v sont des suites de complexes).

Q22 Si (u_n) est à termes positifs, et si $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, alors on peut extraire de (u_n) une suite décroissante.

---

1 : NON : $1/\sqrt{n}$; **2** : NON : $1/n$; **3** : NON : $-n$; **4** : OUI ; **5** : NON : $2n\pi + \pi/2$; **6** : OUI ; **7** : OUI ; **8** : NON : 2^{-n} ; **9** : OUI : $v_n - u_n \geqslant \ell' - \ell$; **10** : NON : $w_n = (1 + (-1)^n)n$; **11** : OUI : encadrer ; **12** : OUI ; **13** : NON : 2^n ; **14** : NON : $(-1)^n n$; **15** : NON : $-1/n$; **16** : NON : $u_n = 1/n$; **17** : OUI ; **18** : NON : $u_n = n(-1)^n + n + 1$ et $v_n = n(-1)^n - n + 1$; **19** : NON : $u_n = (-1)^n n$ et $v_n = -u_n$; **20** : OUI ; **21** : NON : $u_n = 1$ et $v_n = \exp(i\pi/200)$; **22** : OUI ;
