$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exemples de calculs de limites}}$

► Les questions suivantes peuvent être résolues par des méthodes élémentaires ; en particulier, aucun des calculs ne requiert un développement limité.

$\boxed{\text{Q1}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers 1 de $\dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$. Notons $a(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$ et $\tan(u) \underset{u\to 0}{\sim} u$.

• Notons $h = x-1$; alors $a(x) = \dfrac{\ln(1+4h+2h^2)}{\tan(h)}$. Mais $\ln(1+4h+2h^2) \underset{h\to 0}{\sim} 4h$ et $\tan(h) \underset{h\to 0}{\sim} h$.

• Concluons : $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)} = 4}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{17^x - 19^x}{21^x - 23^x}$. Notons $b(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : $a^b = \exp\big(b\ln(a)\big)$ pour $a>0$; $\exp(u)-1 \underset{u\to 0}{\sim} u$.

• Cette fraction peut s'écrire $b(x) = \dfrac{\dfrac{17^x-1}{x} - \dfrac{19^x-1}{x}}{\dfrac{21^x-1}{x} - \dfrac{23^x-1}{x}}$. Mais $17^x - 1 = \exp\big(x\ln(17)\big) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x\ln(17)$. Par suite, il vient $\dfrac{17^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \ln(17)$.

• Avec des formules analogues pour les trois autres fractions, nous obtenons $\boxed{b(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{\ln(17)-\ln(19)}{\ln(21)-\ln(23)}}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{\ln(x^2+2)} - \sqrt{\ln(x^2+1)}$. Notons $c(x)$ cette quantité.

• Formule utilisée : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

• Avec cette formule, il vient $c(x) = \dfrac{\ln(x^2+2) - \ln(x^2+1)}{\sqrt{\ln(x^2+2)} + \sqrt{\ln(x^2+1)}}$. Observons que $\ln(x^2+2) - \ln(x^2+1) = \ln\Big(\dfrac{x^2+2}{x^2+1}\Big) = \ln\Big(1 + \dfrac{1}{x^2+1}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

• Pour ce qui est du dénominateur : $\sqrt{\ln(x^2+2)} + \sqrt{\ln(x^2+1)} = x\Big(\sqrt{\ln(1+2x^{-2})} + \sqrt{\ln(1+x^{-2})}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2x$.

• Concluons : $c(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$, donc $\boxed{c(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\tan^2(x)}$. Notons $d(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : trigonométrie élémentaire.

• Le dénominateur est équivalent à x^2 lorsque x tend vers 0.

• Pour le numérateur, réutilisons la formule du Q3 : il vient $\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)} = \dfrac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}$. Le dénominateur tend vers 2 ; le numérateur peut s'écrire : $\cos^2(x) - \cos(2x) = \cos^2(x) - \big(2\cos^2(x) - 1\big) = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, qui est équivalent à x^2 lorsque x tend vers 0.

• Concluons : $\boxed{d(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\dfrac{2\tan(x) - \sin(2x)}{\sin^3(x)}$. Notons $h(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : formules élémentaires de trigonométrie, expression de tan en fonction de sin et cos.

• Nous pouvons écrire $h(x) = \dfrac{2\sin(x) - 2\sin(x)\cos^2(x)}{\cos(x)\sin^3(x)} = \dfrac{2 - 2\cos^2(x)}{\cos(x)\sin^2(x)} = \dfrac{2\sin^2(x)}{\cos(x)\sin^2(x)} = \dfrac{2}{\cos^2(x)}$.

• Concluons : $\boxed{h(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x}-\sqrt{\lfloor x\rfloor}$. Nous noterons cette quantité $k(x)$.

• Nous pouvons supposer $x>0$. Réutilisons la formule de Q3 : $\sqrt{x}-\sqrt{\lfloor x\rfloor}=\dfrac{x-\lfloor x\rfloor}{\sqrt{x}+\sqrt{\lfloor x\rfloor}}$. Le numérateur $x-\lfloor x\rfloor$ est compris entre 0 (inclus) et 1 (exclus), donc est borné. Le dénominateur est au moins égal à $\sqrt{x}$, donc tend vers $+\infty$ avec x.

• Concluons : $\boxed{k(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x^2\big(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\big)$. Nous noterons cette quantité $\ell(x)$.

• Mettons en facteur la quantité $e^{\frac{1}{x}}$; il vient $\ell(x)=x^2e^{\frac{1}{x}}\big(1-e^{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}}\big)=-x^2e^{\frac{1}{x}}\big(e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1\big)$. Observons que $\dfrac{-1}{x(x+1)}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, donc $e^{\frac{-1}{x(x+1)}}-1\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{x(x+1)}\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{1}{x^2}$; par ailleurs, $e^{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$. Donc $\ell(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-x^2\dfrac{-1}{x^2}=1$.

• Concluons : $\boxed{\ell(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers 1 de $\dfrac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln(x)}$. Nous noterons cette quantité $m(x)$.

• Formules utilisées : $e^u-1\underset{u\to0}{\sim}u$, $\ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u$ et $\sin(u)\underset{u\to0}{\sim}u$.

• $x-1$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1, donc $e^{x-1}-1\underset{x\to1}{\sim}x-1$; en composant les équivalents, il vient $\sin(e^{x-1}-1)\underset{x\to1}{\sim}x-1$. Le dénominateur $\ln(x)$ est équivalent à $x-1$ quand x tend vers 1.

• Concluons : $\boxed{m(x)\xrightarrow[x\to1]{}1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x\big(\mathrm{ch}(x)\big)^{1/x}$. Nous noterons cette quantité $p(x)$.

• Formules utilisées : $a^b=\exp\big(b\ln(a)\big)$ pour $a>0$, et expression de $\mathrm{ch}(x)$.

• $p(x)=x\exp\Big(\dfrac{1}{x}\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)\Big)$. Mais $\mathrm{ch}(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=e^x\times\dfrac{1+e^{-2x}}{2}$, donc $\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)=x+\ln\Big(\dfrac{1+e^{-2x}}{2}\Big)$. Le deuxième terme de cette somme est borné quand x tend vers $+\infty$, si bien que $\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$.

• Concluons : la quantité $\dfrac{1}{x}\ln\big(\mathrm{ch}(x)\big)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc $p(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}x$ et finalement $\boxed{p(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\Big(\sin\Big(\dfrac{\pi x}{2x+1}\Big)\Big)^{x^2}$. Nous noterons cette quantité $q(x)$.

• Formules utilisées : $a^b=\exp\big(b\ln(a)\big)$ pour $a>0$ et $1-\cos(u)\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{u^2}{2}$.

• Un peu de trigonométrie pour commencer : $\sin\Big(\dfrac{\pi x}{2x+1}\Big)=\cos\Big(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi x}{2x+1}\Big)=\cos\Big(\dfrac{\pi}{4x+2}\Big)$.

• Comme $\dfrac{\pi}{4x+2}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, nous aurons $\ln\big(q(x)\big)=x^2\ln\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{4x+2}\Big)\Big)\underset{x\to+\infty}{\sim}x^2\Big(\cos\Big(\dfrac{\pi}{4x+2}\Big)-1\Big)$. Nous en déduisons $\ln\big(q(x)\big)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{x^2}{2}\Big(\dfrac{\pi}{4x+2}\Big)^2\underset{x\to+\infty}{\sim}-\dfrac{\pi^2x^2}{32x^2}$. Donc $\ln\big(q(x)\big)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\dfrac{\pi^2}{32}$.

• Concluons : $\boxed{q(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\exp\Big(-\dfrac{\pi^2}{32}\Big)}$.