

► Les questions suivantes peuvent être résolues par des méthodes élémentaires ; en particulier, aucun des calculs ne requiert un développement limité.

Q1 • Calcul de la limite quand x tend vers 1 de $\frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)}$. Notons $a(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : $\ln(1 + u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\tan(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

• Notons $h = x - 1$; alors $a(x) = \frac{\ln(1 + 4h + 2h^2)}{\tan(h)}$. Mais $\ln(1 + 4h + 2h^2) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} 4h$ et $\tan(h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} h$.

• Concluons : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(2x^2 - 1)}{\tan(x - 1)} = 4}$.

Q2 • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\frac{17^x - 19^x}{21^x - 23^x}$. Notons $b(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : $a^b = \exp(b \ln(a))$ pour $a > 0$; $\exp(u) - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

• Cette fraction peut s'écrire $b(x) = \frac{\frac{17^x - 1}{x} - \frac{19^x - 1}{x}}{\frac{21^x - 1}{x} - \frac{23^x - 1}{x}}$. Mais $17^x - 1 = \exp(x \ln(17)) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \ln(17)$. Par

suite, il vient $\frac{17^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln(17)$.

• Avec des formules analogues pour les trois autres fractions, nous obtenons $\boxed{b(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln(17) - \ln(19)}{\ln(21) - \ln(23)}}$.

Q3 • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{\ln(x^2 + 2)} - \sqrt{\ln(x^2 + 1)}$. Notons $c(x)$ cette quantité.

• Formule utilisée : $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$;

• Avec cette formule, il vient $c(x) = \frac{\ln(x^2 + 2) - \ln(x^2 + 1)}{\sqrt{\ln(x^2 + 2)} + \sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$. Observons que $\ln(x^2 + 2) - \ln(x^2 + 1) =$

$\ln\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x^2 + 1}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$.

• Pour ce qui est du dénominateur : $\sqrt{\ln(x^2 + 2)} + \sqrt{\ln(x^2 + 1)} = x(\sqrt{\ln(1 + 2x^{-2})} + \sqrt{\ln(1 + x^{-2})}) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 2x$.

• Concluons : $c(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$, donc $\boxed{c(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$.

Q4 • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)}}{\tan^2(x)}$. Notons $d(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : trigonométrie élémentaire.

• Le dénominateur est équivalent à x^2 lorsque x tend vers 0.

• Pour le numérateur, réutilisons la formule du Q3 : il vient $\cos(x) - \sqrt{\cos(2x)} = \frac{\cos^2(x) - \cos(2x)}{\cos(x) + \sqrt{\cos(2x)}}$. Le

dénominateur tend vers 2 ; le numérateur peut s'écrire : $\cos^2(x) - \cos(2x) = \cos^2(x) - (2\cos^2(x) - 1) = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, qui est équivalent à x^2 lorsque x tend vers 0.

• Concluons : $\boxed{d(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}}$.

Q5 • Calcul de la limite quand x tend vers 0 de $\frac{2 \tan(x) - \sin(2x)}{\sin^3(x)}$. Notons $h(x)$ cette quantité.

• Formules utilisées : formules élémentaires de trigonométrie, expression de \tan en fonction de \sin et \cos .

• Nous pouvons écrire $h(x) = \frac{2 \sin(x) - 2 \sin(x) \cos^2(x)}{\cos(x) \sin^3(x)} = \frac{2 - 2 \cos^2(x)}{\cos(x) \sin^2(x)} = \frac{2 \sin^2(x)}{\cos(x) \sin^2(x)} = \frac{2}{\cos^2(x)}$.

• Concluons : $\boxed{h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 2}$.

Q6 • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\sqrt{x} - \sqrt{[x]}$. Nous noterons cette quantité $k(x)$.

• Nous pouvons supposer $x > 0$. Réutilisons la formule de Q3 : $\sqrt{x} - \sqrt{[x]} = \frac{x - [x]}{\sqrt{x} + \sqrt{[x]}}$. Le numérateur $x - [x]$ est compris entre 0 (inclus) et 1 (exclus), donc est borné. Le dénominateur est au moins égal à \sqrt{x} , donc tend vers $+\infty$ avec x .

• Concluons : $\boxed{k(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0}$.

Q7 • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x^2(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}})$. Nous noterons cette quantité $\ell(x)$.

• Mettons en facteur la quantité $e^{\frac{1}{x}}$; il vient $\ell(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} (1 - e^{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}) = -x^2 e^{\frac{1}{x}} (e^{\frac{-1}{x(x+1)}} - 1)$. Observons que $\frac{-1}{x(x+1)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $e^{\frac{-1}{x(x+1)}} - 1 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-1}{x(x+1)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}$; par ailleurs, $e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Donc $\ell(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -x^2 \frac{-1}{x^2} = 1$.

• Concluons : $\boxed{\ell(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1}$.

Q8 • Calcul de la limite quand x tend vers 1 de $\frac{\sin(e^{x-1} - 1)}{\ln(x)}$. Nous noterons cette quantité $m(x)$.

• Formules utilisées : $e^u - 1 \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, $\ln(1+u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$ et $\sin(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$.

• $x - 1$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1, donc $e^{x-1} - 1 \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$; en composant les équivalents, il vient $\sin(e^{x-1} - 1) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1$. Le dénominateur $\ln(x)$ est équivalent à $x - 1$ quand x tend vers 1.

• Concluons : $\boxed{m(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1}$.

Q9 • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x(\operatorname{ch}(x))^{1/x}$. Nous noterons cette quantité $p(x)$.

• Formules utilisées : $a^b = \exp(b \ln(a))$ pour $a > 0$, et expression de $\operatorname{ch}(x)$.

• $p(x) = x \exp\left(\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x))\right)$. Mais $\operatorname{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \times \frac{1 + e^{-2x}}{2}$, donc $\ln(\operatorname{ch}(x)) = x + \ln\left(\frac{1 + e^{-2x}}{2}\right)$. Le deuxième terme de cette somme est borné quand x tend vers $+\infty$, si bien que $\ln(\operatorname{ch}(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.

• Concluons : la quantité $\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch}(x))$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$, donc $p(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$ et finalement

$\boxed{p(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty}$.

Q10 • Calcul de la limite quand x tend vers $+\infty$ de $\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right)\right)^{x^2}$. Nous noterons cette quantité $q(x)$.

• Formules utilisées : $a^b = \exp(b \ln(a))$ pour $a > 0$ et $1 - \cos(u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$.

• Un peu de trigonométrie pour commencer : $\sin\left(\frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2x+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4x+2}\right)$.

• Comme $\frac{\pi}{4x+2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, nous aurons $\ln(q(x)) = x^2 \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{4x+2}\right)\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4x+2}\right) - 1\right)$. Nous en déduisons $\ln(q(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{x^2}{2} \left(\frac{\pi}{4x+2}\right)^2 \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\pi^2 x^2}{32x^2}$. Donc $\ln(q(x)) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\frac{\pi^2}{32}$.

• Concluons : $\boxed{q(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2}{32}\right)}$.