Sup PCSI 2 — TD : limites et continuité

Quelques calculs de limites

Q1 Calculez $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\pi/4-\arctan(x)}+\frac{2}{x-1}\right)$. Indications : notez $h=x-1$, et écrivez le $DL_2(0)$ de la fonction $h\mapsto \arctan(1+h)$.

Q2 Calculez $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2\sin(x)-4x}{x\big(e^x+e^{-x}+2\cos(x)-4\big)}$. Indications : faites apparaître sh et ch, et écrivez des $DL_2(0)$ du numérateur et du dénominateur.

Q3 f est définie au voisinage de 0 et deux fois dérivable en 0. Calculez $\lim_{h\to 0}\frac{2f(x+3h)-3f(x+2h)+f(x)}{3h^2}$.

Q4 Calculez $\lim_{x\to\pi/6}\frac{\arctan\big(2\sin(x)\big)-\pi/4}{\cos(3x)}$.

Q5 Calculez $\lim_{x\to 9\pi}\frac{15\tan(5x/2)+8\,\mathrm{cotan}(4x/3)}{\cos(x/6)}$.

Q6 Calculez $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\left(\frac{1}{\mathrm{th}(x)}-\frac{1}{\tan(x)}\right)$.

Q7 Calculez $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+2}-\sqrt[3]{x^3+1}\right)^x$.

Q8 Calculez $\lim_{x\to+\infty}\ln^2(x)\left(\sin\left(\frac{1}{\ln(x)}\right)-\sin\left(\frac{1}{\ln(x+1)}\right)\right)$.

Questions en vrac

Q1 Notons $f:\,x\mapsto \ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right)$. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Montrez que f est dérivable sur D_f. Explicitez $f'(x)$ pour $x\in D_f$.

Q2 Définissons $f:\,\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}+x+1$ si $x\leqslant 0$ et $f(x)=2+x^2\ln(x)$ si $x>0$. f est-elle continue sur $\mathbb{R}$? dérivable sur $\mathbb{R}$? Sa dérivée est-elle continue en 0 ?

Q3 Soient $f\in\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ vérifiant $f(0)=f(1)$ et $n\geqslant 2$. Observez la quantité $\sum_{0\leqslant k<n}\left(f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$ pour prouver l'existence de $x_n\in[0,1]$ tel que $f(x_n)=f\left(x_n+\frac{1}{n}\right)$.

Q4 Soit $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$. Nous supposons que $\frac{f(x)}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$ avec $\ell<1$. Montrez que f possède un point fixe. Qu'en est-il si $\ell=1$?

Q5 Soit $f\in\mathcal{D}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$. Nous supposons $f(0)=0$ et $f(x)>0$ pour $x\in\,]0,1[$. Soient $\alpha>0$ et $\beta>0$. Prouvez l'existence de $c\in\,]0,1[$ tel que $\alpha\frac{f'(c)}{f(c)}\beta\frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$. Indication : observez la fonction $x\in[0,1]\mapsto \big(f(x)\big)^\alpha\big(f(1-x)\big)^\beta$.

Un théorème classique

► Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$. Nous supposons f injective.

Q1 Montrez que l'ensemble Δ des couples (x,y) d'éléments de I vérifiant $x<y$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Q2 Montrez que f est strictement monotone. Indication : observez le signe de $f(x)-f(y)$.

Q3 Soient $k>0$ et $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R})$ vérifiant $\big|f(x)-f(y)\big|\geqslant k|x-y|$ quels que soient les réels x et y. Montrez que f est bijective.

Une suite définie implicitement

► Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrez qu'il existe un réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f(u_n) = (u_n)^n$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Nous supposons maintenant que f est strictement décroissante. Montrez que u_n est unique.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que la suite de terme général u_n est strictement croissante.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que cette suite converge et explicitez sa limite.

Théorème de Darboux

► Soit $f \in \mathcal{D}([a,b],\mathbb{R})$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Supposons $f'(a) > 0 > f'(b)$. Prouvez l'existence de $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit λ réel vérifiant $f'(a) > \lambda > f'(b)$. Prouvez l'existence de $c \in \,]a,b[$ tel que $f'(c) = \lambda$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que l'image d'un intervalle par la dérivée d'une fonction f dérivable est elle-même un intervalle.

Trois assertions

► Soit $f \in \mathcal{D}([0,+\infty[,\mathbb{R})$. Pour chacune des assertions suivantes, donnez une preuve ou un contre-exemple.

$\boxed{\text{Q1}}$ Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$, alors $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors f possède une limite (finie ou infinie).

$\boxed{\text{Q3}}$ Si $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$ avec $\ell > 0$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Mini-problème

► Soit $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $f(0) = 0$ et $f(x) \geqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que $f'(0) \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q2}}$ En appliquant la formule des accroissements finis à f sur l'intervalle $[0,1/n]$, prouvez l'existence d'une suite (u_n) qui converge vers 0 et vérifie $f'(u_n) \geqslant 1$ pour tout n.

$\boxed{\text{Q3}}$ On suppose que $f''(0)$ existe et $f'(0) = 1$. Prouvez l'inégalité $f''(0) \geqslant 0$.

► Notons $g :\ x \neq 0 \mapsto x\left(1 + x + \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Montrez que g est prolongeable par continuité en 0.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que g ainsi prolongée est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ g' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{\text{Q7}}$ Prouvez l'inégalité $g(x) \geqslant x$ pour tout $x \geqslant 0$.