Sup PCSI2 — Exercices : limites (1)

Révision le 6 avril 2009 ; des coquilles peuvent s'être introduites à cette occasion !

▶ Quelques définitions : $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$.

Q1 L'encadrement $-1 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ est évident. Intégrons cet encadrement sur $[0, x]$, avec $x \geqslant 0$: nous obtenons $-x \leqslant \sin(x) \leqslant x$, soit encore $-t \leqslant \sin(t) \leqslant t$. En itérant ce procédé, établissez les encadrements $t - \dfrac{t^3}{6} \leqslant \sin(t) \leqslant t - \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^5}{120}$ et $1 - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \cos(t) \leqslant 1 - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$.

Q2 Déterminez chacune des limites suivantes. L'outillage de TS, joint aux encadrements que vous venez d'établir, est suffisant ; mais rien n'interdit d'utiliser des équivalents, pour accélérer les calculs. Les réponses données entre crochets sont, en principe, exactes. Note : `maple` sait calculer toutes ces limites. . .

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)} \quad [4] \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} - \sqrt{x} \quad \left[\frac{1}{2}\right] \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^x}{1000}}{x^{1000}} \quad [+\infty]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} \quad [1] \qquad \lim_{x\to 0} \big(1-\sin(3x)\big)^{\operatorname{cotan}(5x)} \quad \left[e^{-\frac{3}{5}}\right] \qquad \lim_{x\to 0^+} (\operatorname{cotan}(x))^{1/\ln(x)} \quad \left[\frac{1}{e}\right]$$

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{a/\ln(\sin(\pi x))} \quad [e^a] \qquad \lim_{x\to 0} (\cos(x))^{1/\sin^2(x)} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{e}}\right] \qquad \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan(x)} \quad [1]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\,(\mathrm{ch}(x))^{1/x} \quad [+\infty] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2\tan(x)-\sin(2x)}{\sin^3(x)} \quad [2] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{\tan(x)-x} \quad \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x-\sqrt{x^2-1}} \quad [+\infty] \qquad \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{1/x} \quad [1] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(\cos(x)\big)}{\ln(1+x^2)} \quad \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x+1}}\right) \quad [1] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(\cos(ax)\big)}{\ln\big(\cos(bx)\big)} \quad \left[\frac{a^2}{b^2}\right] \qquad \lim_{x\to a} \frac{\sin(ax)-\sin(x^2)}{a-x} \quad [a\cos(a^2)]$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\cos(ax)-\cos(x^2)}{x-a} \quad [a\sin(a^2)] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(px)-\cos(qx)}{x^2} \quad \left[\frac{q^2-p^2}{2}\right] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\tan(x)}{x^3} \quad \left[-\frac{1}{2}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{17^x-19^x}{21^x-23^x} \quad \left[\frac{\ln(17)-\ln(19)}{\ln(21)-\ln(23)}\right] \qquad \lim_{x\to 0^+} \left(1-\mathrm{th}\Big(\frac{1}{x}\Big)\right)^x \quad [e^{-2}] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{(4^x-1)(5^x-1)}{(3^x-1)(6^x-1)} \quad \left[\frac{\ln(4)\ln(5)}{\ln(3)\ln(6)}\right]$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sin(e^{x-1}-1)}{\ln(x)} \quad [1] \qquad \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\ln(x^2+2)} - \sqrt{\ln(x^2+1)} \quad [0] \qquad \lim_{x\to 0^+} (\mathrm{sh}(x))^{\mathrm{th}(x)} \quad [1]$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1} \quad [e] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\tan^2(x)} \quad \left[\frac{1}{2}\right] \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\Big(\frac{3x}{2}\Big)\right)^{\tan(3x)} \quad \left[\frac{1}{e}\right]$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\operatorname{cotan}(x)-1}{x^2} \quad \left[-\frac{1}{3}\right] \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}-\sin(x)-\cos(x)}{\ln\big(\sin(2x)\big)} \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{4}\right] \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sin\Big(\frac{\pi x}{2x+1}\Big)\right)^{x^2} \quad \left[e^{-\frac{\pi^2}{32}}\right]$$

Q3 Calculez la limite de $\sqrt{x} - \sqrt{\lfloor x \rfloor}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q4 Déterminez a et b tels que $f : x \geqslant 0 \mapsto ax + b - \sqrt{x^2+4x}$ vérifie $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$; donnez alors un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Réponse : $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2}{x}$.

Q5 Donnez un équivalent simple de $\left(\sin\Big(\dfrac{\pi x}{2x+1}\Big)\right)^{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Q6 Calculez $\lim\limits_{x\to 1/2} (2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$.

Q7 En utilisant des équivalents, ou des encadrements bien connus, calculez les limites suivantes ; les réponses sont indiquées entre crochets.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2)-\cos\big(\sin^2(x)\big)}{\tan(x)-x} \quad [0] \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan\big(\sin(x)\big)-\tan\big(\sin^2(x)\big)}{\sin(x)-x^2} \quad [1] \qquad \lim_{x\to 0} \big(\mathrm{ch}(x)\big)^{1/x} \quad [1]$$