Un mini-problème

► Nous étudions $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^1 \big||x| - t\big|\, dt$.

Q1 Quelle considération simple permet de réduire l'intervalle d'étude de f ?

Q2 Explicitez $f(x)$ pour $x > 1$, puis pour $x \in [0, 1]$.

Q3 Tracez la courbe représentative de f.

Q4 f est-elle dérivable en 0 ? et en 1 ?

► Nous nous proposons de calculer $J = \displaystyle\int_0^{2\pi} \big(\pi - |2x - \pi|\big) \sin(x)\, dx$.

Q5 Quelle valeur de α faut-il choisir pour que la relation de Chasles $\displaystyle\int_{[0,2\pi]} = \int_{[0,\alpha]} + \int_{[\alpha,2\pi]}$ nous permette d'éliminer les valeurs absolues ?

Q6 Calculez chacune des deux intégrales au moyen d'une IPP soigneusement justifiée.

Q7 Concluez !

Q8 Rédigez un script Maple pour calculer J.

Un mini-problème

► Nous nous proposons de calculer $L = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{38}(t) \cos^3(t)\, dt$.

Q9 Effectuez le changement de variable $u = \sin(t)$; vous présenterez le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

Q10 Le changement de variable $u = \cos(t)$ aurait-il mené au résultat ?

Q11 Plus généralement, soient p et q deux naturels. Quel(s) changement(s) de variable peut-on effectuer pour calculer $I_{p,q} = \sin^p(t) \cos^q(t)\, dt$? Que proposez-vous de faire lorsque p et q sont pairs ?

Q12 Calculez *rapidement* $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{333}(t) \cos^{2010}(t)\, dt$.

Un mini-problème

► Pour $n \in \mathbb{N}$, nous noterons $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\, dt$. Nous admettrons que la fonction $f : x \geqslant 0 \mapsto x\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, et que $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$ pour tout $x \geqslant 0$.

Q1 Calculez I_0.

Q2 Au moyen d'une IPP, établissez une relation entre I_n et I_{n+1}.

Q3 En déduire une expression simple de I_n.

Q4 Simplifiez $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{2k+3}$. *Réponse* : $\dfrac{2^{2n+1}}{(2n+1)(2n+3)\binom{2n}{n}}$

7 : $4 + 2\pi$; **9** : $2/1599$; **10** : NON ; **12** : 0 ;