Sup PCSI 2 — Exercices : intégration (3)

Primitives et dérivées

Q1 Montrez que la fonction $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_x^{3x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^6}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ entier et qu'elle est dérivable ; explicitez $\varphi'(x)$ et montrez que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. φ possède-t-elle une parité ?

Q2 Déterminez l'ensemble de définition $\mathcal{E}_g$ de la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt$. Montrez que g est dérivable sur $\mathcal{E}_g$, puis explicitez $g'(x)$ pour $x \in \mathcal{E}_g$.

Calculs d'intégrales

► Nous nous proposons de calculer $S = \displaystyle\int_0^{\pi/4} t\cos^2(2t)\,dt$.

Q3 Linéarisez $\cos^2(2t)$.

Q4 Terminez le calcul, avec une IPP soigneusement justifiée.

Q5 Avec la même technique, calculez $T = \displaystyle\int_0^{\pi/2} t\cos^3(t)\,dt$.

Q6 Rédigez un script Maple pour calculer S et T.

Sommes de Riemann

Q7 Déterminez la limite de la suite de terme général $A_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2+k^2}$.

Q8 Déterminez la limite de la suite de terme général $B_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n}{n^2+2k^2}$. Remarques : attention à l'indexation ; pour calculer l'intégrale, effectuez le changement de variable $u = t\sqrt{2}$.

Q9 Déterminez la limite de la suite de terme général $C_n = \dfrac{4}{n^3+8} + \dfrac{16}{n^3+4^3} + \cdots + \dfrac{(2n)^2}{n^3+(2n)^3}$. Remarque : une fois n'est pas coutume, voici des points de suspension…

Q10 Calculez $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{k}{\sqrt{k^2n^2+n^4}}$. Pour calculer l'intégrale, vous effectuerez un changement de variable.

Q11 Déterminez la limite de la suite de terme général $E_n = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{k/n^2}$. Indication : utilisez la fonction ln pour éliminer le $\prod$.

Q12 Calculez la limite quand n tend vers l'infini de $S_n = \dfrac{1}{n\sqrt{n}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \dfrac{2}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \dfrac{n}{\sqrt{2n}}\right)$.

Q13 Calculez la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+k)(n+k+1)}}$. Indication : encadrez astucieusement !

---

4 : $S = \pi^2/64 - 1/16$; **5** : $\pi/3 - 7/9$; **7** : $\pi/4$; **9** : $\ln\left(\sqrt[3]{3}\right)$; **10** : $\sqrt{2}-1$; **11** : $\sqrt[4]{e}$; **12** : $\dfrac{4-2\sqrt{2}}{3}$; **13** : $\ln(2)$;