Calculs autour de $\arctan$

Q1 Calculez $\displaystyle\int_0^1 \arctan(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$.

Q2 Calculez $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+\arctan(t)}{1+t^2}\,dt$, $J = \displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,dt$ et $K = \displaystyle\int_0^1 t\big(\arctan(t)\big)^2\,dt$.

Q3 Calculez les intégrales $J_1 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$; $J_2 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} \frac{dt}{1+2t^2}$; $J_3 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{1+t^2}$; $J_4 = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/3} \frac{t^3\,dt}{1+t^2}$; $J_5 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}$, $J_6 = \displaystyle\int_0^2 \frac{t\,dt}{(4+t^2)^2}$.

Q4 Au moyen de changements de variable judicieux, calculez $I(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+a^2}$, puis $J(a) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2+at+a^2}$.

Questions diverses

Q5 Fixons $a \in \mathbb{R}^*$ et notons $I_n(t) = \displaystyle\int_0^t x^n e^{ax}\,dx$. Calculez $I_0(t)$; établissez une relation entre $I_{n+1}(t)$ et $I_n(t)$; calculez alors la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^4 e^x\,dx$.

Q6 Notons $I(a) = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+a^4x^2}\,dx$. Montrez que $I(a)$ tend vers $\frac{1}{3}$ lorsque a tend vers zéro.

Q7 Notons $S_n(t) = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} t^k$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{S_n(t)}\,dt$. Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, puis déterminez sa limite en observant $\displaystyle\int_0^1 (1-t)\,dt$.

Q8 Déterminez $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_1^{1+1/n} \sqrt{1+t^n}\,dt$.

Q9 Calculez $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt$. Source : Bac C juin 1976, Maroc.

Q10 Soit $f \in \mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, vérifiant $\displaystyle\int_{[0,1]} f^2 = \int_{[0,1]} f^3 = \int_{[0,1]} f^4 = 0$. Montrez que $f = \mathbf{0}$ ou $f = \mathbf{1}$.

Q11 Oral de l'X. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $f(0) = 0$. Calculez $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2 \int_0^{1/n} f(x)e^x\,dx$.

Q12 $\star$ Soient a, b vérifiant $a < b$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,b],\mathbb{R}_+^*\big)$. Montrez que $\displaystyle\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) \times \left(\int_a^b \frac{dx}{f(x)}\right) \geqslant (b-a)^2$. Étudiez les cas d'égalité. (CCP option MP)

---

1 : $\dfrac{\pi}{4} - \ln(\sqrt{2})$, $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$; **2** : $\pi/4 + \pi^2/32$, $\pi/4 - 1/2$, $\ln(2)/2 - \pi/4 + \pi^2/16$; **3** : $\pi/3$, $\arctan(2)/\sqrt{2}$, $\ln(2)/2$, $1/6 - \ln(2) + \ln(3)/2$, $1/4$, $1/16$; **5** : $9e - 24$; **9** : $3\ln(2) - 3\ln(3)/2$;