Sup PCSI 2 — Exercices : intégration (1)

Petites questions faciles

Q1 Soient a, b, c, d quatre réels vérifiant $a < b < c < d$ et $f \in \mathcal{C}\big([a,d],\mathbb{R}\big)$. Prouvez la formule suivante :

$$\int_{[a,b]} f \times \int_{[c,d]} f + \int_{[a,c]} f \times \int_{[d,b]} f + \int_{[a,d]} f \times \int_{[b,c]} f = 0$$

Q2 Soient $f \in \mathcal{C}\big(\mathbb{R},\mathbb{R}\big)$ et $a \in \mathbb{R}$. Que pouvez-vous dire de $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt$ si f est impaire ?

Q3 Que pouvez-vous dire de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si elle vérifie $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ quels que soient les réels a et b ?

Q4 Que pouvez-vous dire de $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ si elle vérifie $\displaystyle\int_{-a}^{+a} f(t)\,dt = 0$ quel que soit le réel a ?

Calculs d'intégrales

Q5 Calculez $K_1 = \displaystyle\int_1^3 t^2 \exp\Big(\frac{t^3-1}{5}\Big)\,dt$. Indication : changement de variable.

Q6 Calculez $K_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\cos^2(t)\,dt$. Indication : linéariser, ou changer de variable.

Q7 Calculez $K_3 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{t}{\cos^2(t)}\,dt$. Indication : IPP.

Q8 Calculez $K4 = \displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln(t)}}{t}\,dt$. Indication : changement de variable.

Q9 Calculez $K_5 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \ln\big(1+\tan(t)\big)\,dt$. Indication : changement de variable.

Q10 Calculez $K_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+3}{(t+1)(t+2)}\,dt$. Indication : déterminez des réels a et b tels que $\dfrac{t+3}{(t+1)(t+2)} = \dfrac{a}{t+1} + \dfrac{b}{t+2}$ pour « presque tout » réel t.

Q11 Calculez $K_7 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^6(t)\,dt$.

Q12 Étudiez la fonction $x \geqslant 0 \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\exp(-t^2)}{t}\,dt$.

Q13 Calculez l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équations respectives $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ et $\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} = 1$.

Q14 ⋆⋆ Pour $n \geqslant 1$, notons $I_n = \displaystyle\int_1^n \frac{dx}{\sqrt{n^2+x^3}}$. Prouvez que la suite $(I_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. Indication : découpez l'intervalle $[1,n]$ en deux morceaux. Quel est le point de coupure optimal ?

Q15 Notons $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 |x-t|\,dt$. Donnez l'expression de $f(x)$ dans les trois cas suivants : $x \leqslant 0$; $0 \leqslant x \leqslant 1$; $1 \leqslant x$.

---

5 : $\dfrac{5(e^{26/5}-1)}{3}$; **6** : $2/15$; **7** : $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2}$; **8** : $\dfrac{4\sqrt{2}-2}{3}$; **9** : $\dfrac{\pi\ln(2)}{8}$; **10** : $3\ln(2) - 3\ln(3)/3$; **11** : $\dfrac{5\pi}{32}$;
13 : $2/3$; **14** : couper en $\alpha > n^{2/3}$; **15** : $f(x) = 1/2 - x$, $f(x) = x^2 - x + 1/2$, $f(x) = x - 1/2$;