TD : intégrales de Wallis

Partie I

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : t \in [0,1] \mapsto t^n\sqrt{1-t^2}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$.

Q1 La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle monotone ?

Q2 Montrez que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, précisez sa limite.

Q3 Calculez I_0 au moyen du changement de variable $t = \sin(u)$.

Q4 Calculez I_1 en observant la dérivée de $t \in [0,1] \mapsto (1-t^2)^{3/2}$.

Q5 Simplifiez $P_n = \displaystyle\prod_{1\leqslant k\leqslant n}(2k-1)$; le résultat ne devra comporter que des factorielles et des puissances de 2, à l'exclusion de tout symbole $\prod$. Vous vérifierez l'exactitude de la formule trouvée, pour $n \in [\![1,3]\!]$.

Q6 Au moyen d'une intégration par parties, exprimez I_{n+2} en fonction de I_n. En déduire la valeur de I_k pour $k \in [\![2,5]\!]$.

Q7 En déduire l'expression de I_{2p}, puis celle de I_{2p+1} ; le résultat ne devra comporter que des factorielles, des puissances de 2, et au besoin le nombre π. Vérifiez que les formules obtenues concordent avec les valeurs de I_k, $k \in [\![2,5]\!]$, établies à la question 6.

Q8 Simplifiez $I_{2p} \times I_{2p+1}$, puis donnez un équivalent *simple* de cette quantité lorsque p tend vers l'infini.

Q9 Justifiez l'affirmation suivante : I_{n+1} est équivalent à I_n lorsque n tend vers l'infini.

Q10 En déduire un équivalent *simple* de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie II

Q11 Soit $n \geqslant 1$. Étudiez rapidement les variations de f_n ; vous noterez x_n l'unique solution dans $]0,1[$ de l'équation $f_n'(x) = 0$, et $y_n = f_n(x_n)$.

Q12 Tracez dans un même repère (unité : 10 cm) les courbes représentatives de f_1, f_2 et f_3.

Q13 Donnez un équivalent *simple* de $1 - x_n$ lorsque n tend vers l'infini.

Q14 Donnez un équivalent *simple* de y_n lorsque n tend vers l'infini. Retrouvez alors l'un des résultats de Q2.

Q15 Justifiez l'existence du réel $z_n = \tan\big(\arcsin(x_n)\big)$, puis donnez une expression *simple* de z_n.

Partie III

► Notons $g_n : t \in [0,1] \mapsto \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n} f_k(t)$ et $h : u \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{4u^2}{(1+u^2)^2}$.

Q16 Calculez la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini ; cette limite, qui dépend de $t \in [0,1]$, sera notée $g(t)$.

Q17 La fonction g est-elle continue sur $[0,1]$?

Q18 Pour $x \in [0,1[$, établir, au moyen d'un changement de variable ou par toute autre méthode :

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_1^{g(x)} h(u)\,du$$

Q19 En remarquant que $h(u) = (-2u) \times \left(\dfrac{-2u}{(1+u^2)^2}\right)$, calculez $\displaystyle\int_a^b h(u)\,du$, pour $0 \leqslant a \leqslant b < 1$.

Q20 En déduire la valeur, pour $x \in [0,1[$, de :

$$\varphi(x) = \int_0^x g(t)\,dt - 2\arctan\big(g(x)\big) + \sqrt{1-x^2}$$

Q21 Calculez la limite de $\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.