

Partie I

► Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $f_n : t \in [0, 1] \mapsto t^n \sqrt{1-t^2}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(t) dt$.

- Q1 La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
- Q2 Montrez que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, précisez sa limite.
- Q3 Calculez I_0 au moyen du changement de variable $t = \sin(u)$.
- Q4 Calculez I_1 en observant la dérivée de $t \in [0, 1] \mapsto (1-t^2)^{3/2}$.
- Q5 Simplifiez $P_n = \prod_{1 \leq k \leq n} (2k-1)$; le résultat ne devra comporter que des factorielles et des puissances de 2, à l'exclusion de tout symbole \prod . Vous vérifierez l'exactitude de la formule trouvée, pour $n \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$.
- Q6 Au moyen d'une intégration par parties, exprimez I_{n+2} en fonction de I_n . En déduire la valeur de I_k pour $k \in \llbracket 2, 5 \rrbracket$.
- Q7 En déduire l'expression de I_{2p} , puis celle de I_{2p+1} ; le résultat ne devra comporter que des factorielles, des puissances de 2, et au besoin le nombre π . Vérifiez que les formules obtenues concordent avec les valeurs de I_k , $k \in \llbracket 2, 5 \rrbracket$, établies à la question 6.
- Q8 Simplifiez $I_{2p} \times I_{2p+1}$, puis donnez un équivalent *simple* de cette quantité lorsque p tend vers l'infini.
- Q9 Justifiez l'affirmation suivante : I_{n+1} est équivalent à I_n lorsque n tend vers l'infini.
- Q10 En déduire un équivalent *simple* de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie II

- Q11 Soit $n \geq 1$. Étudiez rapidement les variations de f_n ; vous noterez x_n l'unique solution dans $]0, 1[$ de l'équation $f'_n(x) = 0$, et $y_n = f_n(x_n)$.
- Q12 Tracez dans un même repère (unité : 10 cm) les courbes représentatives de f_1 , f_2 et f_3 .
- Q13 Donnez un équivalent *simple* de $1 - x_n$ lorsque n tend vers l'infini.
- Q14 Donnez un équivalent *simple* de y_n lorsque n tend vers l'infini. Retrouvez alors l'un des résultats de Q2.
- Q15 Justifiez l'existence du réel $z_n = \tan(\arcsin(x_n))$, puis donnez une expression *simple* de z_n .

Partie III

► Notons $g_n : t \in [0, 1] \mapsto \sum_{0 \leq k \leq n} f_k(t)$ et $h : u \in \mathbb{R} \mapsto \frac{4u^2}{(1+u^2)^2}$.

- Q16 Calculez la limite de $g_n(t)$ lorsque n tend vers l'infini ; cette limite, qui dépend de $t \in [0, 1]$, sera notée $g(t)$.
- Q17 La fonction g est-elle continue sur $[0, 1]$?
- Q18 Pour $x \in [0, 1[$, établir, au moyen d'un changement de variable ou par toute autre méthode :

$$\int_0^x g(t) dt = \int_1^{g(x)} h(u) du$$

- Q19 En remarquant que $h(u) = (-2u) \times \left(\frac{-2u}{(1+u^2)^2} \right)$, calculez $\int_a^b h(u) du$, pour $0 \leq a \leq b < 1$.

- Q20 En déduire la valeur, pour $x \in [0, 1[$, de :

$$\varphi(x) = \int_0^x g(t) dt - 2 \arctan(g(x)) + \sqrt{1-x^2}$$

- Q21 Calculez la limite de $\int_0^x g(t) dt$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.