Q1 Exhibez $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante, et telle que l'on n'ait ni $f(x) = \mathcal{O}(x)$, ni $x = \mathcal{O}\big(f(x)\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Q2 Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Supposins que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) = o(x^2)$ et $g(x) = \mathcal{O}(x)$. Que pouvez-vous dire, respectivement, de $f + g$, $f - g$ et $f \times g$? Si f et g tendent toutes deux vers $+\infty$, que peut-on dire de $f \circ g$ et $g \circ f$?

Q3 Étudiez les variations de la fonction $x > 0 \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$. En déduire les solutions dans $\mathbb{N}^*$ de l'équation $a^b = b^a$.

Q4 Soit $a > 0$. Établissez $\ln(a) = \min\limits_{x>0}\left(\dfrac{a}{x} + \ln(x) - 1\right)$. En déduire que, si f et h sont deux éléments de $\mathcal{C}\big([0,1], \mathbb{R}_+^*\big)$, et si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 1$, alors : $\displaystyle\int_0^1 \ln\big(h(x)\big) f(x)\,dx \leqslant \ln\left(\int_0^1 h(x)f(x)\,dx\right)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

Un mini-problème

► Dans ce problème, f est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,dt = 2f(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

Q1 Combien vaut $f(0)$?

Q2 Pour $x \neq 0$, effectuez le changement de variable $u = xt$, et obtenez une nouvelle équation intégrale vérifiée par f.

Q3 Montrez alors que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis sur $\mathbb{R}$ entier.

Q4 Montrez que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et qu'elle est solution d'une équation différentielle *que vous ne chercherez pas à résoudre.*

Q5 Existe-t-il des fonctions polynômes solutions de cette équation différentielle ? *Indication* : quel devrait être le coefficient dominant ?

Un mini-problème

► Notons $f :\ x \in \mathbb{R} \mapsto x + 2x^4$.

Q1 Déterminez le plus grand intervalle contenant 0 et sur lequel f est strictement monotone.

Q2 Notons I cet intervalle. Montrez que la restriction de f à I réalise une bijection de I sur un intervalle J que vous préciserez ; nous noterons g la bijection réciproque.

Q3 En n'utilisant que la continuité de g en 0, montrez que $g(x)$ est un $o(1)$ quand x tend vers 0.

Q4 Donnez un équivalent simple de $g(x)$ quand x tend vers 0.

Q5 Retrouvez ce résultat en utilisant la dérivabilité de g en 0.

Q6 Déterminez un équivalent simple de $g(x) - x$ quand x tend vers 0.

Q7 Poussez le calcul encore un cran plus loin, pour obtenir un développement de la forme $g(x) = P(x) + o(x^7)$, où P est une fonction polynôme de degré 7.

Q8 Évaluez $f\big(P(0.1)\big)$, puis $f\big(P(1)\big)$. Quelle conclusion en tirez-vous ?