

- Q1** Exhibez $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ strictement croissante, et telle que l'on n'ait ni $f(x) = \mathcal{O}(x)$, ni $x = \mathcal{O}(f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$.
- Q2** Soient f et g deux fonctions de \mathbb{R} dans lui-même. Supposons que, lorsque x tend vers $+\infty$, $f(x) = o(x^2)$ et $g(x) = \mathcal{O}(x)$. Que pouvez-vous dire, respectivement, de $f + g$, $f - g$ et $f \times g$? Si f et g tendent toutes deux vers $+\infty$, que peut-on dire de $f \circ g$ et $g \circ f$?
- Q3** Étudiez les variations de la fonction $x > 0 \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$. En déduire les solutions dans \mathbb{N}^* de l'équation $a^b = b^a$.
- Q4** Soit $a > 0$. Établissez $\ln(a) = \min_{x>0} \left(\frac{a}{x} + \ln(x) - 1 \right)$. En déduire que, si f et h sont deux éléments de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$, et si $\int_0^1 f(x) dx = 1$, alors : $\int_0^1 \ln(h(x)) f(x) dx \leq \ln \left(\int_0^1 h(x) f(x) dx \right)$. Dans quel cas a-t-on l'égalité?

Un mini-problème

► Dans ce problème, f est un élément de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ vérifiant $\int_0^1 f(xt) dt = 2f(x)$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

- Q1** Combien vaut $f(0)$?
- Q2** Pour $x \neq 0$, effectuez le changement de variable $u = xt$, et obtenez une nouvelle équation intégrale vérifiée par f .
- Q3** Montrez alors que f est dérivable sur \mathbb{R}^* , puis sur \mathbb{R} entier.
- Q4** Montrez que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , et qu'elle est solution d'une équation différentielle *que vous ne chercherez pas à résoudre*.
- Q5** Existe-t-il des fonctions polynômes solutions de cette équation différentielle? *Indication* : quel devrait être le coefficient dominant?

Un mini-problème

► Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x + 2x^4$.

- Q1** Déterminez le plus grand intervalle contenant 0 et sur lequel f est strictement monotone.
- Q2** Notons I cet intervalle. Montrez que la restriction de f à I réalise une bijection de I sur un intervalle J que vous préciserez ; nous noterons g la bijection réciproque.
- Q3** En n'utilisant que la continuité de g en 0, montrez que $g(x)$ est un $o(1)$ quand x tend vers 0.
- Q4** Donnez un équivalent simple de $g(x)$ quand x tend vers 0.
- Q5** Retrouvez ce résultat en utilisant la dérivabilité de g en 0.
- Q6** Déterminez un équivalent simple de $g(x) - x$ quand x tend vers 0.
- Q7** Poussez le calcul encore un cran plus loin, pour obtenir un développement de la forme $g(x) = P(x) + o(x^7)$, où P est une fonction polynôme de degré 7.
- Q8** Évaluez $f(P(0.1))$, puis $f(P(1))$. Quelle conclusion en tirez-vous?