Q1 Exhibez une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue, paire, et surjective.

Q2 $\star$ Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ peut-elle être à la fois périodique, continue, et non bornée ?

Q3 Exhibez une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $f(x) = y$ possède une infinité de solutions.

Q4 Soient f et g deux fonctions bornées d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; justifiez l'existence de $\sup\limits_I(f+g)$, et comparez ce réel avec $\sup\limits_I f + \sup\limits_I g$.

Q5 Calculez les limites suivantes ; les réponses sont indiquées.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x^2) - \cos\big(\sin^2(x)\big)}{\tan(x) - x}$	0	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan\big(\sin(x)\big) - \tan\big(\sin^2(x)\big)}{\sin(x) - x^2}$	1
$\lim\limits_{x\to 0} \big(\operatorname{ch}(x)\big)^{1/x}$	1	$\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k^x\right)^{1/x}$	$\sqrt[n]{n!}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\arctan(x+1)}{\arctan(x)}\right)^{x^2}$	$\exp\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^\alpha(x+1) - \ln^\alpha(x) \quad (\alpha > 0)$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(x^2+x+1)}{\ln(x^2-x+1)}\right)^{x\ln(x)}$	e	$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^x$	$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Q6 Exhibez $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et f' n'a pas de limite en $+\infty$.

Q7 Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $f(x) = o(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$; a-t-on nécessairement $\ln\big(f(x)\big) = o\big(\ln(x)\big)$? Montrez que si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, alors $\exp\big(f(x)\big) = o\big(e^x\big)$.

Q8 Étudiez les fonctions :

$$x \mapsto x + \ln(x^2-1) \qquad x \mapsto \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right) \qquad x \mapsto |x|^{1/x} \qquad x \mapsto e^{-x^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{1+e^{1/x}}$$

$$x \mapsto x\frac{e^x-1}{e^x+1} \qquad x \mapsto \frac{x+1}{x-1}\ln(|x|) \qquad x \mapsto x^2 e^{1/x} \qquad x \mapsto x^{1+\frac{1}{x}} \qquad x \mapsto \frac{e^x}{e^x-1}$$

$$x \mapsto e^{1/x}\sqrt{x+4} \qquad x \mapsto \frac{1}{\operatorname{th}(x)} - \frac{1}{x} \qquad x \mapsto x^{\frac{1}{x-1}} \qquad x \mapsto \frac{x}{x-1}e^x \qquad x \mapsto xe^{\frac{1}{1-x}}$$

$$x \mapsto \frac{x^2}{x-1}e^{1/x} \qquad x \mapsto \frac{\ln\big(\sin(x)\big)}{\ln\big(\cos(x)\big)} \qquad x \mapsto x^{\frac{1}{\ln(x)-1}} \qquad x \mapsto x^{1-\frac{1}{x}}$$

Q9 Donnez un équivalent simple de $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right)$ lorsque $x \to +\infty$. *Réponse* : x^{-2}.

Q10 Prouvez que $f : x \geqslant e \mapsto x\ln(x)$ réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur lui-même ; donnez un équivalent simple de $f^{-1}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q11 Soit $f : x > 0 \mapsto \dfrac{e^x}{x}$. Prouvez que la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$ réalise une bijection. Notons g la bijection réciproque ; prouvez que $g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, puis donnez un développement asymptotique à trois termes de $g(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Q12 Prouvez que $f : x \geqslant 0 \mapsto xe^x$ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même ; prouvez que $f^{-1}(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$, puis donnez un équivalent simple de $f^{-1}(x) - \ln(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Q13 Soient $f : x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \mapsto \dfrac{2x}{\pi} + \dfrac{x}{12\pi}(\pi^2 - 4x^2)$ et $g : x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] \mapsto \sin(x)$. Montrez que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Tracez les courbes représentatives de f et g sur un écran d'ordinateur (utiliser `maple` ou `gnuplot`, par exemple).

---

1 : $x \mapsto x^2\cos(x)$; **3** : $x \mapsto x^2\cos(x)$;