► Un tas de petites questions disparates, qui ne demandent que peu de connaissances. Sauf avis contraire, les fonctions considérées sont définies sur $\mathbb{R}$ entier.

Primitives

► Rappel : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$; soient f et F deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Nous dirons que F est une *primitive* sur I de f si F est dérivable et $F' = f$.

Q1 Quelles sont les primitives de la fonction `abs` (valeur absolue) ?

Q2 Ces primitives sont-elles toutes impaires ?

Q3 Combien la fonction $x \mapsto |x|$ possède-t-elle de primitives impaires ?

Q4 Quelles sont les primitives de la fonction $x \mapsto x|x|$?

Parités, symétries

Q5 La fonction arccos possède-t-elle une parité ?

Q6 La courbe représentative de la fonction arccos possède-t-elle une symétrie ?

Q7 La fonction arg ch possède-t-elle une parité ?

Q8 Exhibez deux fonctions f et g, définies sur $\mathbb{R}$, qui ne sont ni paires ni impaires, mais dont la somme est paire et dont le produit est impair.

Q9 La courbe représentative de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède un centre de symétrie ; pouvez-vous affirmer quelque chose au sujet de la parité de f, ou d'une fonction « proche » de f ?

Q10 Soit $x \in \mathbb{R}$; notons $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$. Quelle(s) relation(s) simple(s) existe-t-il entre les fonctions $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto |x|$, $p : x \mapsto x^+$ et $n : x \mapsto x^-$?

Q11 ⋆ Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifie $f(x) \leqslant f(1-x)$ pour tout réel x. Que pouvez-vous dire de sa courbe représentative ? (Ouardini 2.6)

Q12 ⋆ La courbe représentative de $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ possède deux centres de symétrie. f est-elle nécessairement périodique ?

Fonctions bornées (ou pas)

Q13 On sait que f et g sont bornées. Peut-on en déduire que $f + g$ et fg sont bornées ?

Q14 On sait que $f + g$ et fg sont bornées. Peut-on en déduire que f et g sont bornées ?

Q15 Montrez que $f : x \mapsto \dfrac{3}{x^2 + x + 1}$ est bornée. Précisez ses bornes inférieure et supérieure ; ces bornes sont-elles atteintes ?

Q16 Montrez que $g : x \mapsto \dfrac{x - 1}{x^2 + x + 1}$ est bornée. Précisez ses bornes inférieure et supérieure ; ces bornes sont-elles atteintes ?

Q17 Exhibez une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique mais non bornée.

---

1 : $x \to x|x|/2 + k$; **2** : NON ; **3** : une seule : g définie par $g(x) = x|x|/2$ sinon ; **4** : $x \mapsto |x|^3/3 + k$; **5** : NON ; **6** : OUI ; **7** : NON ; **8** : $x \mapsto x^+$ et $x \mapsto x^-$; **9** : $f(x + a) = b - f(x)$; **10** : $p - n = f$, $p + n = g$; **11** : axe de symétrie $x = 1/2$; **12** : NON ; **13** : OUI ; **14** : OUI ; **15** : max $= 4$, inf $= 0$; **16** : max $= 1/(3 + 2\sqrt{3})$, min $= 1/(3 - 2\sqrt{3})$; **17** : $f(x) = \text{cotan}(\pi x)$ si $x \notin \mathbb{Z}$, $f(x) = 0$ sinon ;