

- Un tas de petites questions disparates, qui ne demandent que peu de connaissances. Sauf avis contraire, les fonctions considérées sont définies sur  $\mathbb{R}$  entier.

### Primitives

- Rappel : soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  ; soient  $f$  et  $F$  deux fonctions de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Nous dirons que  $F$  est une primitive sur  $I$  de  $f$  si  $F$  est dérivable et  $F' = f$ .

- Q1 Quelles sont les primitives de la fonction **abs** (valeur absolue) ?  
 Q2 Ces primitives sont-elles toutes impaires ?  
 Q3 Combien la fonction  $x \mapsto |x|$  possède-t-elle de primitives impaires ?  
 Q4 Quelles sont les primitives de la fonction  $x \mapsto x|x|$  ?

### Parités, symétries

- Q5 La fonction arccos possède-t-elle une parité ?  
 Q6 La courbe représentative de la fonction arccos possède-t-elle une symétrie ?  
 Q7 La fonction  $\operatorname{arg ch}$  possède-t-elle une parité ?  
 Q8 Exhibez deux fonctions  $f$  et  $g$ , définies sur  $\mathbb{R}$ , qui ne sont ni paires ni impaires, mais dont la somme est paire et dont le produit est impair.  
 Q9 La courbe représentative de  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  possède un centre de symétrie ; pouvez-vous affirmer quelque chose au sujet de la parité de  $f$ , ou d'une fonction « proche » de  $f$  ?  
 Q10 Soit  $x \in \mathbb{R}$  ; notons  $x^+ = \max(x, 0)$  et  $x^- = \max(-x, 0)$ . Quelle(s) relation(s) simple(s) existe-t-il entre les fonctions  $f : x \mapsto x$ ,  $g : x \mapsto |x|$ ,  $p : x \mapsto x^+$  et  $n : x \mapsto x^-$  ?  
 Q11 ★ Une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  vérifie  $f(x) \leq f(1-x)$  pour tout réel  $x$ . Que pouvez-vous dire de sa courbe représentative ? (OUARDINI 2.6)  
 Q12 ★ La courbe représentative de  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  possède deux centres de symétrie.  $f$  est-elle nécessairement périodique ?

### Fonctions bornées (ou pas)

- Q13 On sait que  $f$  et  $g$  sont bornées. Peut-on en déduire que  $f+g$  et  $fg$  sont bornées ?  
 Q14 On sait que  $f+g$  et  $fg$  sont bornées. Peut-on en déduire que  $f$  et  $g$  sont bornées ?  
 Q15 Montrez que  $f : x \mapsto \frac{3}{x^2+x+1}$  est bornée. Précisez ses bornes inférieure et supérieure ; ces bornes sont-elles atteintes ?  
 Q16 Montrez que  $g : x \mapsto \frac{x-1}{x^2+x+1}$  est bornée. Précisez ses bornes inférieure et supérieure ; ces bornes sont-elles atteintes ?  
 Q17 Exhibez une fonction  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  périodique mais non bornée.

---

**1** :  $x \mapsto x|x|/2 + k$  ; **2** : NON ; **3** : une seule :  $g$  définie par  $g(x) = x|x|/2$  sinon ; **4** :  $x \mapsto |x|^3/3 + k$  ;  
**5** : NON ; **6** : OUI ; **7** : NON ; **8** :  $x \mapsto x^+$  et  $x \mapsto x^-$  ; **9** :  $f(x+a) = b - f(x)$  ; **10** :  $p - n = f$ ,  $p + n = g$  ;  
**11** : axe de symétrie  $x = 1/2$  ; **12** : NON ; **13** : OUI ; **14** : OUI ; **15** :  $\max = 4$ ,  $\inf = 0$  ; **16** :  $\max = 1/(3+2\sqrt{3})$ ,  $\min = 1/(3-2\sqrt{3})$  ; **17** :  $f(x) = \cotan(\pi x)$  si  $x \notin \mathbb{Z}$ ,  $f(x) = 0$  sinon ;