Exercice 1 : énoncé

► Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les relations $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = -x_n + 2y_n$ et $z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Donnez l'expression de x_n en fonction de n seul.

$\boxed{\text{Q2}}$ Soit $u_n = \dfrac{y_n}{x_n}$. Donnez l'expression de u_n en fonction de n seul, puis celle de y_n.

$\boxed{\text{Q3}}$ Soit $v_n = \dfrac{z_n}{x_n}$. Donnez l'expression de v_n en fonction de n seul, puis celle de z_n.

Exercice 1 : corrigé

► Les suites (x_n), (y_n) et (z_n) sont définies par les relations $x_0 = y_0 = z_0 = 1$, $x_{n+1} = 2x_n$, $y_{n+1} = -x_n + 2y_n$ et $z_{n+1} = x_n - y_n + 2z_n$.

$\boxed{\text{Q1}}$ La suite (x_n) est géométrique de raison 2, donc $x_n = 2^n x_0$ soit $\boxed{x_n = 2^n}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Nous avons $u_{n+1} = \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{-x_n + 2y_n}{2x_n} = u_n - \dfrac{1}{2}$. La suite (u_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{1}{2}$; donc $u_n = u_0 + n\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{y_0}{u_0} - \dfrac{n}{2} = \boxed{1 - \dfrac{n}{2}}$. Nous en déduisons $x_n = u_n y_n = 2^n - n2^{n-1} = \boxed{(2-n)2^{n-1}}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Nous avons $v_{n+1} = \dfrac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = \dfrac{x_n - y_n + 2z_n}{2x_n} = \dfrac{z_n}{x_n} - \dfrac{y_n}{2x_n} + \dfrac{1}{2} = v_n - \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{2}$. Avec le résultat de la question précédente, il vient $v_{n+1} = v_n + \dfrac{n}{4}$; il reste à effectuer une sommation :

$$v_n = v_0 + \sum_{0\leqslant k<n} (v_{k+1} - v_k) = \frac{z_0}{x_0} + \sum_{0\leqslant k<n} \frac{k}{4} = 1 + \frac{1}{4} \times \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 8}{8}$$

En reportant dans l'expression de z_n, il vient : $z_n = 2^n v_n = (n^2 - n + 8)2^{n-3}$.

Exercice 2 : énoncé

► Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto e^{-x} - \dfrac{x-n}{x+n}$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$; nous la noterons u_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Observez le signe de $f_n(n)$, pour établir l'inégalité $u_n > n$. Qu'en déduisez-vous au sujet de la suite (u_n) ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Observez le signe de $f_n(n+1)$ et déduisez-en la limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{n}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ La suite de terme général $a_n = u_n - n$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ • Nous avons $f_n(x) = e^{-x} - \dfrac{x+n-2n}{x+n} = e^{-x} - 1 + \dfrac{2n}{x+n}$. Ainsi, f_n est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, en tant que somme des fonctions $x \mapsto e^{-x} + 1$ et $x \mapsto \frac{2n}{x+n}$, qui le sont toutes deux. Donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$ sur l'intervalle $]\lim_{+\infty} f_n, f_n(0)] =]-1, 2]$. Donc f_n s'nnule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$, ce qui revient à dire que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • $f_n(n) = e^{-n} > 0 = f_n(u_n)$; comme f_n est décroissante, nous en déduisons $\boxed{u_n > n}$. Donc la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, puisqu'elle est minorée par une suite qui diverge vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • $f_n(n+1) = e^{-n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$. Or $e^{n+1} > 2^{n+1} = (1+1)^{n+1} = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} \binom{n+1}{k}$. Pour $n \geqslant 2$, nous avons $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} \binom{n+1}{k} \geqslant 2 + 2\binom{n+1}{1} = 2n+4$, à plus forte raison $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} \binom{n+1}{k} > 2n+1$. Pour $n = 1$, $e^{n+1} = e^2 > 4 > 2n+1$. Donc, pour tout $n \geqslant 1$, nous aurons $e^{-n-1} < \dfrac{1}{2n+1}$, d'où $f_n(n+1) < 0 = f_n(u_n)$; comme f_n est décroissante, nous en déduisons $\boxed{u_n < n+1}$.

• Nous avons $n < u_n < n+1$, donc $1 < \dfrac{u_n}{n} < 1 + \dfrac{1}{n}$. Le théorème des trois suites permet d'affirmer que $\boxed{\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1}$; donc $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • La relation définissant u_n peut s'écrire $(u_n + n)e^{-u_n} = u_n - n$. la relation $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$ implique $u_n < n+1$ APCR. D'autre part, $u_n > n$ implique $0 < e^{-u_n} < e^{-n}$. Donc $0 < a_n < 2(n+1)e^{-u_n}$. Par encadrement, la suite de terme général a_n converge vers 0.

$\boxed{\text{Q5}}$ • Nous avons $u_n = n + a_n$, donc $u_n = n + o(1)$. Alors $u_n - n = (u_n + n)e^{u_n} = \big(2n + o(1)\big)e^{-n}e^{o(1)}$, donc $\boxed{a_n \underset{n\to\infty}{\sim} 2ne^{-n}}$.

Exercice 3 : énoncé

▶ Pour $n \geqslant 2$, notons $f_n : x \geqslant 0 \mapsto x^n - nx - 1$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Prouvez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$.

▶ Cette solution sera désormais notée x_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que $x_n > 1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Prouvez que $x_n < 3$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Prouvez que $x_n < 2$ pour tout $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, établissez $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant n+1$.

$\boxed{\text{Q6}}$ En déduire $x_n > 1 + \dfrac{1}{n}$ pour tout $n \geqslant 2$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Étudiez la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$, puis établissez la convergence de cette suite.

$\boxed{\text{Q8}}$ Déterminez $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

▶ Pour $n \geqslant 2$, notons $\varepsilon_n = x_n - 1$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 3 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, sa dérivée est $f_n(x) = nx^{n-1} - n$, qui s'annule en changeant de signe pour $x = 1$. Sur $[0,1]$, f_n' est négative, donc f_n décroît de $f_n(0) = -1$ à $f_n(1) = -n$, et ne saurait s'annuler. Sur $[1, +\infty[$, f_n' est positive, et même strictement sur $]1, +\infty[$, si bien que f_n, continue et strictement croissante, réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $\big[f_n(1), \lim\limits_{+\infty} f_n\big[= [-n, +\infty[$ car $f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^n$. Ainsi, f_n s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • En fait, nous avons montré à la question précédente que x_n appartient à l'intervalle $]1, +\infty[$, donc $x_n > 1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • Il suffit de vérifier que $f_n(3) > 0$, ce que nous ferons par récurrence sur $n \geqslant 2$. $f_2(3) = 3^2 - 2\cdot 3 - 1 = 2 > 0$. Supposons $f_n(3) > 0$, alors $f_{n+1}(3) = 3^{n+1} - 3(n+1) - 1 = 3\cdot 3^n - 3n - 4 = (3^n - 3n - 1) + (2\cdot 3^n - 3) = f_n(3) + 2\cdot 3^n - 3$; or, pour $n \geqslant 2$, $3^n \geqslant 9$, donc $2\cdot 3^n - 3 \geqslant 15$, à plus forte raison $2\cdot 3^n - 3 \geqslant 0$, puis $f_{n+1}(3) \geqslant f_n(3)$, d'où $f_{n+1}(3) > 0$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • De même, il suffit de vérifier que $f_n(2) > 0$, ce que nous ferons encore par récurrence sur $n \geqslant 3$. $f_3(2) = 2^3 - 3\cdot 2 - 1 = 1 > 0$. Supposons établi $f_n(2) > 0$, alors $f_{n+1}(2) = 2^{n+1} - 2(n+1) - 1 = (2^n - 2n - 1) + (2^n - 2) = f_n(2) + 2^n - 2$. Or, pour $n \geqslant 3$, nous avons $2^n - 2 \geqslant 0$ donc $f_{n+1}(2) \geqslant f_n(2)$ et à plus forte raison $f_{n+1}(2) > 0$.

$\boxed{\text{Q5}}$ • $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k}$. Or $\dbinom{n}{k} n^{-k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!n^k} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!n^k}$; il est clair que $\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k} \leqslant 1$, car chacun des k facteurs du numérateur est au plus égal à n ; *a fortiori*, $\dfrac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!n^k} \leqslant 1$, donc $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant n+1$ en tant que somme de $n+1$ termes, tous majorés par 1.

$\boxed{\text{Q6}}$ • Alors $f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 1 = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - n - 2 \leqslant n+1-n-2 = -1$, *a fortiori* $f_n\left(1+\dfrac{1}{n}\right) < 0$; comme f_n est croissante sur $]1,+\infty[$, nous en déduisons $\boxed{x_n > 1+\dfrac{1}{n}}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $f_{n+1}(x_n) = {x_n}^{n+1} - (n+1)x_n - 1$; or $f_n(x_n) = 0$, donc ${x_n}^n = nx_n + 1$, d'où

$$f_{n+1}(x_n) = (nx_n+1)x_n - (n+1)x_n - 1 = nx_n(x_n-1) - 1$$

Mais $x_n > 1+\dfrac{1}{n}$, donc $x_n - 1 > \dfrac{1}{n}$ et $nx_n(x_n-1) > x_n$, d'où $f_{n+1}(x_n) > \frac{1}{n}$, *a fortiori* $f_{n+1}(x_n) > 0$, ce qui implique $x_{n+1} < x_n$. Ainsi, la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est strictement décroissante ; étant minorée par 1, elle converge, et sa limite ℓ est supérieure ou égale à 1.

$\boxed{\text{Q8}}$ Supposons $\ell > 1$ et notons $\varepsilon = \ell - 1$, donc $\varepsilon > 0$. De $f_n(x_n) = 0$, on déduit ${x_n}^n = nx_n + 1$. $(x_n)_{n\geqslant 2}$ étant décroissante, nous avons $x_n \geqslant \ell$ pour tout $n \geqslant 2$, donc ${x_n}^n \geqslant (1+\varepsilon)^n \geqslant 1 + n\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$ puisque $n \geqslant 2$; comme $x_n \leqslant 3$, nous avons $nx_n + 1 \leqslant 3n+1$. Nous aurions donc $1 + n\varepsilon + \dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2 \leqslant 3n+1$, et ce pour tout $n \geqslant 2$. Ceci est contradictoire, car le membre de droite est équivalent à $3n$ quand $n \to \infty$, et est alors négligeable devant celui de gauche, puisque ce dernier est équivalent à $\dfrac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$. Nous n'avons donc pas $\ell > 1$, si bien que $\boxed{\ell = 1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ ${x_n}^n = nx_n + 1$, donc $n\ln(x_n) = \ln(nx_n+1)$ soit $n\ln(1+\varepsilon_n) = \ln\big(n(1+\varepsilon_n)+1\big) = \ln\left(n\left(1+\varepsilon_n+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. D'où $\ln(1+\varepsilon_n) = \dfrac{1}{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\varepsilon_n+\dfrac{1}{n}\right)\right)$. Or $\varepsilon_n = x_n - 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\ln(1+\varepsilon_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \varepsilon_n$; et $\ln\left(1+\varepsilon_n+\dfrac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\ln\left(1+\varepsilon_n+\dfrac{1}{n}\right)$ est négligeable devant $\ln(n)$ quand $n \to \infty$, ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{n}\left(\ln(n) + \ln\left(1+\varepsilon_n+\frac{1}{n}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$$

d'où, par transitivité, $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$.

Exercice 4 : énoncé

► Dans tout l'exercice, c désigne un réel strictement supérieur à 1.

$\boxed{\text{Q1}}$ Montrez que les relations $u_0 = c$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ définissent *effectivement* une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

$\boxed{\text{Q2}}$ Étudiez le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: monotonie, convergence.

$\boxed{\text{Q3}}$ A-t-on $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Établissez l'encadrement $2 < (u_{n+1})^2 - (u_n)^2 < 2 + u_{n+1} - u_n$.

$\boxed{\text{Q5}}$ En déduire un encadrement de $(u_n)^2$ ne faisant intervenir que n, c et u_n (à l'exclusion de tout autre terme de la suite).

$\boxed{\text{Q6}}$ Justifiez le fait que $u_n = o\big((u_n)^2\big)$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire un équivalent simple de u_n.

Exercice 4 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion : « u_n est défini et strictement positif ». $\mathcal{P}(0)$ est vraie, de par le choix de u_0. Si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $u_n \neq 0$, donc $\dfrac{1}{u_n}$ est défini, et il en est de même pour u_{n+1} ; et $\dfrac{1}{u_n} > 0$, donc $u_{n+1} > 0$. Ainsi, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • $\dfrac{1}{u_n} > 0$ implique $u_{n+1} > u_n$: la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. Si elle convergeait vers $\ell \in \mathbb{R}$, on aurait $\ell = \ell + \dfrac{1}{\ell}$, soit $\dfrac{1}{\ell} = 0$; or aucun réel ne vérifie ceci. Donc $\boxed{\text{la suite diverge vers } +\infty}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$, donc $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$; *a fortiori*, $\dfrac{1}{u_n}$ est négligeable devant u_n, donc $\boxed{u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} u_n}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 = \left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)^2 - (u_n)^2 = 2 + \dfrac{1}{(u_n)^2} > 2$; de plus, $u_n \geqslant u_0 = c > 1$ implique $\dfrac{1}{(u_n)^2} < \dfrac{1}{u_n} = u_{n+1} - u_n$, donc $(u_{n+1})^2 - (u_n)^2 < 2 + u_{n+1} - u_n$.

$\boxed{\text{Q5}}$ En remplaçant n par k dans l'encadrement précédent, et en sommant pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, il vient :

$$\sum_{0\leqslant k<n} 2 < \sum_{0\leqslant k<n} \left({u_{k+1}}^2 - {u_k}^2\right) < \sum_{0\leqslant k<n} \left(2 + u_{k+1} - u_k\right)$$

d'où, après télescopage : $2n < (u_n)^2 - {u_0}^2 < 2n + u_n - u_0$, dont nous déduisons :

$$\boxed{2n + c^2 < (u_n)^2 < 2n + u_n + c^2 - c}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ $\dfrac{u_n}{(u_n)^2} = \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. Donc $u_n = o\big((u_n)^2\big)$ lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q7}}$ L'encadrement de la question 5 peut s'écrire $(u_n)^2 - u_n - c^2 + c < 2n < (u_n)^2 - c^2$; en divisant par $(u_n)^2$, nous obtenons :

$$1 - \frac{1}{u_n} - \frac{c^2+c}{u_n} < \frac{2n}{(u_n)^2} < 1 - \frac{c^2}{u_n}$$

Nous venons de voir que u_n est négligeable devant $(u_n)^2$, et il est clair que c et c^2 (constantes) sont négligeables devant $(u_n)^2$; donc les suites de termes généraux respectifs $1 - \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{c^2+c}{u_n}$ et $1 - \dfrac{c^2}{u_n}$ convergent toutes deux vers 0. Le théorème des trois suites nous donne $\dfrac{2n}{(u_n)^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc $(u_n)^2 \underset{n\to\infty}{\sim} 2n$, soit, comme $u_n > 0$: $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2n}}$.

Exercice 5 : énoncé

► Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. Vous distinguerez bien ${u_n}^2$, qui est le carré du terme d'indice n de cette suite, et que l'on peut aussi noter $(u_n)^2$; et u_{n^2}, qui est le terme d'indice n^2.

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $x > 0$. Montrez que les relations $u_1 = x$, et $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{n+{u_n}^2}$ pour $n \geqslant 1$, définissent *effectivement* une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs.

$\boxed{\text{Q2}}$ Proposez un script Maple qui calcule la valeur de u_{100n} pour $n \in [\![1,20]\!]$.

$\boxed{\text{Q3}}$ Dans cette question uniquement, nous supposons $x = 1$; dressez un tableau donnant la valeur de u_n pour $n \in [\![1,4]\!]$; vous ferez apparaître les calculs dans votre copie.

$\boxed{\text{Q4}}$ Si cette suite converge, quelle est *nécessairement* sa limite ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que $u_n \geqslant 1$ implique $u_{n+1} \leqslant 1$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Montrez que $u_n \leqslant 1$ implique $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Finalement, quels sont les indices n pour lesquels on a *certainement* $u_n \leqslant 1$?

$\boxed{\text{Q8}}$ Montrez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge, et précisez sa limite.

$\boxed{\text{Q9}}$ Donnez un équivalent *très simple* de u_n lorsque n tend vers l'infini.

► Notons $v_n = nu_n - 1$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n et de n.

$\boxed{\text{Q11}}$ En déduire un équivalent simple de v_n lorsque n tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Q12}}$ Donnez alors un développement asymptotique à deux termes de u_n ; le petit o final ne compte pas pour un terme.

Exercice 5 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ Notons $\mathcal{A}(n)$ l'assertion suivante : « on peut calculer u_n, et ce réel est strictement positif ». La donnée de $x > 0$ nous assure que $\mathcal{A}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{A}(n)$ acquise, avec $n \geqslant 1$; alors le dénominateur $n + {u_n}^2$ est strictement positif, à plus forte raison non nul, si bien que l'on peut calculer u_{n+1} ; et le numérateur $1 + u_n$ est lui aussi strictement positif, si bien que u_{n+1} l'est également. Ceci établit $\mathcal{A}(n+1)$. Par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Compte tenu du mode de définition de cette suite, on utilise l'option `remember` On n'oublie pas que l'énoncé définit u_{n+1} à partir de u_n, mais que Maple ne peut que définir u_n.

```
x := 6.66;
u := proc(n) option remember;
 (1+u(n-1))/(n-1+u(n-1)^2) end;
u(1) := x;
seq(u(100*n),n=1..20);
```

Remarque : si x est de type *float*, les calculs seront très rapides ; en revanche, si x est de type *integer* ou *fraction*, les calculs seront très lents, car les numérateurs et dénominateurs mis en jeu voient leurs tailles augmenter exponentiellement avec n.

$\boxed{\text{Q3}}$ $u_1 = x = 1$; $u_2 = \dfrac{1+u_1}{1+{u_1}^2} = \dfrac{1+1}{1+1} = 1$; $u_3 = \dfrac{1+u_2}{2+{u_2}^2} = \dfrac{1+1}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$u_4 = \dfrac{1+u_3}{1+{u_3}^2} = \dfrac{1+2/3}{3+4/9} = \dfrac{5/3}{31/9} = \dfrac{15}{31}$.

n	1	2	3	4
u_n	1	1	2/3	15/31

$\boxed{\text{Q4}}$ Supposons que u_n converge vers ℓ ; il en est alors de même pour u_{n+1}. Dans l'expression qui définit ce dernier, le numérateur converge vers $1+\ell$, tandis que le dénominateur diverge vers $+\infty$, puisqu'il est minoré par n. Par suite, u_{n+1} converge vers 0, donc $\boxed{\ell = 0}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Si $u_n \geqslant 1$, alors $u_n \leqslant {u_n}^2$; par ailleurs, $1 \leqslant n$, donc $1 + u_n \leqslant n + {u_n}^2$. Ces deux nombres sont strictement positifs, donc $\dfrac{1+u_n}{n+{u_n}^2} \leqslant 1$ soit $\boxed{u_{n+1} \leqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Si $u_n \leqslant 1$, alors $1 + u_n \leqslant 2$. Par ailleurs, $n + {u_n}^2 \geqslant n > 0$, donc $\dfrac{1}{n+{u_n}^2} \leqslant \dfrac{1}{n}$. Nous en déduisons $\boxed{u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ • Si $u_n \leqslant 1$, alors $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$; si de plus $n \geqslant 2$, alors $u_{n+1} \leqslant 1$ et donc, avec une récurrence immédiate, $u_p \leqslant 1$ pour tout $p \geqslant n$. Il suffit donc d'examiner u_1 et u_2.

• Si $u_1 \geqslant 1$, alors $u_2 \leqslant 1$ puis $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 2$ d'après ce qui précède : l'inégalité $u_n \leqslant 1$ vaut sauf pour $n = 1$.

• Si $u_1 \leqslant 1$, alors $u_2 \leqslant 2$: si $u_2 \leqslant 1$, il est à nouveau certain que $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 2$, et donc pour $n \geqslant 1$. Mais si $u_2 \in \,]1, 2]$, alors $u_3 \leqslant 1$, puis $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 3$: dans ce cas, l'inégalité $u_n \leqslant 1$ vaut sauf pour $n = 2$.

• Concluons : dans tous les cas de figure, nous aurons certainement $u_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 3$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Pour $n \geqslant 3$, nous avons $u_n \leqslant 1$ et donc $u_{n+1} \leqslant \dfrac{2}{n}$; par ailleurs, $u_n > 0$. Le théorème des trois suites permet d'affirmer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers 0 ; il en est donc de même de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ $u_n = o(1)$, donc $1 + u_n \underset{n\to\infty}{\sim} 1$ et $n + {u_n}^2 \underset{n\to\infty}{\sim} n$; par suite, $u_{n+1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$. En remplaçant n par $n-1$, on en déduit $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n-1}$; et comme $\dfrac{1}{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, nous pouvons finalement annoncer : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Le calcul commence banalement :

$$v_{n+1} = (n+1)u_{n+1} - 1 = (n+1)\frac{1+u_n}{n+{u_n}^2} - 1 = \frac{(n+1)(1+u_n) - n - {u_n}^2}{n+{u_n}^2} = \frac{1 + nu_n + u_n - {u_n}^2}{n+{u_n}^2}$$

À ce stade, nous pouvons diminuer la complexité des calculs en faisant apparaître $nu_n = 1 + v_n$:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{n^2 + n^3u_n + n^2u_n - n^2{u_n}^2}{n^3 + n^2{u_n}^2} = \frac{n^2 + n^2(1+v_n) + n(1+v_n) - (1+v_n)^2}{n^3 + (1+v_n)^2} \\ &= \frac{2n^2 + n^2v_n + n + nv_n - 1 - 2v_n - {v_n}^2}{n^3 + 1 + 2v_n + {v_n}^2} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Notons que $v_n = o(1)$, d'où $v_{n+1} = \dfrac{2n^2 + o(n^2)}{n^3 + \mathcal{O}(1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$. Il serait imprudent de conclure que $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ car, dans une suite qui converge vers zéro, deux termes consécutifs ne sont pas nécessairement équivalents. Toutefois, nous pouvons écrire $v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n-1}$, et, comme $\dfrac{2}{n-1} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}$ nous obtenons finalement $\boxed{v_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{2}{n}}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Nous avons donc $v_n = \dfrac{2}{n} + o\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$. Mais $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{v_n}{n}$; ainsi $\boxed{u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{2}{n^2} + o\Big(\dfrac{1}{n^2}\Big)}$.

Exercice 6 : énoncé

► Pour $n \geqslant 1$, nous noterons a_n la n-ième décimale de $\sqrt{2}$, et $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} 2^{-k}a_k$. Vous pourrez utiliser l'encadrement suivant de $\sqrt{2}$:

$$1.41421356237309504880 < \sqrt{2} < 1.41421356237309504881$$

Ainsi, $a_1 = 4$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$ et $S_3 = 11/4$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Calculez S_4 et S_5. Vous donnerez les résultats sous forme de fractions irréductibles !

$\boxed{\text{Q2}}$ Montrez que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\boxed{\text{Q3}}$ La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle strictement croissante ?

$\boxed{\text{Q4}}$ Justifiez la majoration $S_n < 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Prouvez la convergence de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$. Nous noterons désormais ℓ sa limite.

► **Attention** : on ne demande pas de calculer ℓ…

$\boxed{\text{Q6}}$ En procédant comme à la question 4, établissez la majoration $S_n < 55/16$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez S_8.

$\boxed{\text{Q8}}$ Déduisez des deux résultats précédents la valeur de $\lfloor \ell \rfloor$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Montrez que a_n est le chiffre des unités de $\left\lfloor \sqrt{2\cdot 10^{2n}} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Proposez un script Maple comportant deux fonctions : l'une pour calculer a_n, l'autre pour calculer S_n.

Exercice 6 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ $S_4 = S_3 + 2^{-4}\cdot a_4 = S_3 + 2^{-4}\cdot 2 = \dfrac{11}{4} + \dfrac{1}{8} = \dfrac{23}{8}$ et $S_5 = S_4 + 2^{-5}\cdot a_5 = S_4 + 2^{-5}\cdot 1 = \dfrac{23}{8} + \dfrac{1}{32} = \dfrac{93}{32}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ $S_{n+1} = S_n + 2^{-n-1}a_{n+1} \geqslant S_n$ puisque $a_{n+1} \geqslant 0$. Ceci montre que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

$\boxed{\text{Q3}}$ Notons que $a_{13} = 0$, donc $S_{13} = S_{12}$: la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ n'est pas strictement croissante.

$\boxed{\text{Q4}}$ Par définition, $a_n \leqslant 9$ quel que soit $n \geqslant 1$. Donc $S_n = \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} 2^{-k}a_k \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 2^{-k}\cdot 9 = 9\sum_{1\leqslant k\leqslant n} 2^{-k}$. Avec un changement d'indice, il vient $S_n \leqslant 9\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} 2^{-k-1} = \frac{9}{2}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} \big(1/2\big)^k = \frac{9}{2}\times\frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} = 9\big(1-(1/2)^n\big)$ et donc $\boxed{S_n < 9}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée, donc elle converge. Nous pouvons même affirmer que sa limite ℓ est au plus égale à 9.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $n \geqslant 5$. Avec les mêmes techniques de majoration qu'à la question 4, nous pouvons écrire :

$$S_n = S_4 + \sum_{5\leqslant k\leqslant n} 2^{-k}a_k \leqslant \frac{23}{8} + 9\sum_{5\leqslant k\leqslant n} 2^{-k} = \frac{23}{8} + \frac{9}{32}\sum_{0\leqslant k\leqslant n-5} 2^{-k} < \frac{23}{8} + \frac{9}{16} = \frac{55}{16}$$

Comme la suite est croissante, cette majoration reste valable pour les termes d'indice $n \leqslant 4$.

$\boxed{\text{Q7}}$ $S_8 = S_5 + 3\cdot 2^{-6} + 5\cdot 2^{-7} + 6\cdot 2^{-8} = \dfrac{93}{32} + \dfrac{3}{64} + \dfrac{5}{128} + \dfrac{6}{256} = \dfrac{372+6+5+3}{128} = \dfrac{386}{128} = \dfrac{193}{64}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Notons que $S_8 > 3$, donc $\ell > 3$ puisque la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante. Mais nous avons établi $S_n < \dfrac{27}{8}$ pour tout $n \geqslant 1$; donc, en passant à la limite, $\ell \leqslant \dfrac{27}{8}$; à plus forte raison, $\ell < 4$. De l'encadrement $3 < \ell < 4$, nous déduisons $\boxed{\lfloor \ell \rfloor = 3}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Par définition, $1 + \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{10^k} \leqslant \sqrt{2} < 1 + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{a_k}{10^k} + \frac{1}{10^n}$. En multipliant par 10^n, nous obtenons l'encadrement $10^n + \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} 10^{n-k}a_k \leqslant 10^n\sqrt{2} < 10^n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n} 10^{n-k}a_k + 1$. Mais le nombre $N = 10^n + \displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n} 10^{n-k}a_k$ est un naturel ; par ailleurs, $10^n\sqrt{2} = \sqrt{2\cdot 10^{2n}}$. Donc $N = \left\lfloor \sqrt{2\cdot 10^{2n}} \right\rfloor$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Nous supposons que la valeur de `Digits` est suffisamment grande ; a_n est le chiffre des unités d'un nombre dont la partie entière s'écrit avec $2n+1$ chiffres ; pour évaluer a_n, il faut connaître au moins une décimale de N, ce qui requiert une valeur de `Digits` au moins égale à $2n+2$.

```
a := n -> irem(floor(sqrt(2*10^(2*n)),10);
S := n -> add(2^(-k)*a(k),k=1..n);
```

Exercice 7 : énoncé

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $n \geqslant 3$. Prouvez que l'équation $e^x = x^n$ possède, dans l'intervalle $]1, e[$, une et une seule solution, que nous noterons désormais u_n.

$\boxed{\text{Q2}}$ Prouvez que la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge.

$\boxed{\text{Q3}}$ Déterminez la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Donnez un équivalent *simple* de $u_n - \ell$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 7 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ $e^x = x^n$ ssi $e^x = e^{n\ln(x)}$ soit $x = n\ln(x)$, ou $\dfrac{x}{\ln(x)} = n$ puisque $\ln(x) \neq 0$. Étudions $f : x \in\,]1, e[\, \mapsto \dfrac{x}{\ln(x)}$; f est continue et dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) ; $f'(x) = \dfrac{\ln(x)-1}{x^2}$, donc f' est strictement négative sur $]1, e[$, et par suite f est strictement décroissante ; ainsi, elle réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $\left]\lim\limits_{x\to e^-} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right[=]e, +\infty[$. Comme $e < 3$, nous pouvons affirmer que $f(x)$ prend une et une seule fois la valeur $n \geqslant 3$, lorsque x décrit $]1, e[$, ce qui répond à la question.

$\boxed{\text{Q2}}$ • $f(u_n) = n$ et $f(u_{n+1}) = n+1$; comme f est strictement décroissante, nous en déduisons $u_n > u_{n+1}$; ainsi, la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante. Par ailleurs, elle est minorée (par 1). Donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q3}}$ • Nous allons prouver que $\ell = 1$, en raisonnant par l'absurde. Supposons $\ell > 1$; f est continue en ℓ, et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$; nous aurions donc $\lim\limits_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$, soit $\lim\limits_{n\to\infty} n = f(\ell)$, ce qui est absurde. D'où $\ell = 1$.

• Autre méthode, plus directe : $\ln(u_n) = \dfrac{u_n}{n}$. Nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{n} = 0$, puisque la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$ est bornée. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(u_n) = 0$ et par suite $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Très simple : $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, donc $\dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, si bien que $u_n - 1 = \exp\left(\dfrac{u_n}{n}\right) - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{u_n}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$
