Nous déterminons un équivalent simple de l'expression

$$u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{n - 2 + \cdots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}}}$$

Observons que u_n est minorée par $\sqrt{n}$, et que $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + u_{n-2}}}$.

Nous majorons $(u_{n-2})^2$ par la somme $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n-2} k = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \leqslant \frac{n^2}{2}$. Donc $u_{n-2} \leqslant \dfrac{n}{\sqrt{2}}$.

Alors $(u_{n-1})^2 = n - 1 + u_{n-2} \leqslant n - 1 + \dfrac{n}{\sqrt{2}} \leqslant 2n$.

Donc $u_{n-1} \leqslant \sqrt{2n}$, puis $u_n \leqslant \sqrt{n + \sqrt{2n}}$, ce qui nous donne l'encadrement $\sqrt{n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{n + \sqrt{2n}}$.

$\sqrt{2n}$ est négligeable devant n ; donc $\sqrt{n + \sqrt{2n}}$ est équivalent à $\sqrt{n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Finalement, $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{n}$.