Exercice 1 : énoncé

► On note $f : x \geqslant 1 \mapsto \displaystyle\int_1^x \sqrt{t \ln t}\, dt$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Justifiez l'existence de l'application f.

$\boxed{\text{Q2}}$ Quelle est la classe de continuité de f ?

$\boxed{\text{Q3}}$ Quelle est la classe de continuité de la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$?

$\boxed{\text{Q4}}$ Quel est le sens de variation de f ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que vous préciserez.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $x \in J$, justifiez l'inégalité $f^{-1}(x) \geqslant \sqrt{2x+1}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Énoncez puis démontrez la formule d'intégration par parties.

$\boxed{\text{Q8}}$ Au moyen d'une intégration par parties *soigneusement justifiée*, montrez que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{2x\sqrt{x \ln x}}{3}$$

$\boxed{\text{Q9}}$ Donnez un équivalent *simple* de $f(x)$ lorsque x tend vers 1 (par valeurs supérieures, bien entendu).

Exercice 1 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ L'application $\varphi : x \geqslant 1 \mapsto \sqrt{x \ln(x)}$ est définie et continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$. À ce titre, elle possède des primitives sur cet intervalle ; f est celle qui s'annule en 1.

$\boxed{\text{Q2}}$ • En tant que primitive d'une fonction continue sur l'intervalle $[1, +\infty[$, f est dérivable et même de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

• φ n'est pas dérivable à droite de 1 ; en effet, avec l'équivalent classique $\ln(x) \underset{x \to 1}{\sim} x - 1$:

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{x \ln(x)}}{x - 1} \underset{x \to >+}{\sim} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x - 1} \underset{x \to >+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \xrightarrow[x \to 1^+]{} +\infty$$

Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^1$ *sans plus* sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

$\boxed{\text{Q3}}$ La restriction de φ à l'intervalle $]1, +\infty[$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$; il en est donc de même de la restriction de f à cet intervalle.

$\boxed{\text{Q4}}$ $g : x \geqslant 1 \mapsto x \ln(x)$ est strictement croissante sur $[1, +\infty[$ car $g'(x) = 1 + \ln(x)$ est strictement positif sur cet intervalle. Dans ces conditions, f est strictement croissante en tant que composée de g et de $u \geqslant 0 \mapsto \sqrt{u}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ f, continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, réalise une bijection de cet intervalle sur $\left[f(1), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$, soit $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\text{Q6}}$ On sait que $\ln(t) \leqslant t - 1$ pour $t \geqslant 1$; à plus forte raison, $\ln(t) \leqslant t$. Donc, pour $t \geqslant 1$, on aura $0 \leqslant t \ln(t) \leqslant t^2$ d'où $\sqrt{t \ln(t)} \leqslant t$ puis par intégration $f(y) = \displaystyle\int_1^y \sqrt{t \ln(t)}\, dt \leqslant \int_1^y t\, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^y = \frac{y^2 - 1}{2}$. On en déduit $y^2 \geqslant 2f(y) + 1$ pour $y \geqslant 1$. Soient $x \in J$ et $y = f^{-1}(x)$; on a bien $y \geqslant 1$, donc $\left(f^{-1}(x)\right)^2 \geqslant 2f\left(f^{-1}(x)\right) + 1 = 2x + 1$ soit $f^{-1}(x) \geqslant \sqrt{2x+1}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Ceci est une question de cours. Ne pas oublier que la formule s'applique avec deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$!

$\boxed{\text{Q8}}$ Notons $g : x \geqslant e \mapsto f(x) - f(e) = \displaystyle\int_e^x \sqrt{t\ln(t)}\,dt$. Soient $u : t \geqslant e \mapsto \dfrac{2t\sqrt{t}}{3}$ et $v : t \geqslant e \mapsto \sqrt{\ln(t)}$; u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[e, +\infty[$ ce qui permet d'effectuer une intégration par parties :

$$g(x) = \int_e^x \sqrt{t}\cdot\sqrt{\ln(t)}\,dt = \int_e^x u'(t)v(t)\,dt = \big[u(t)v(t)\big]_e^x - \int_e^x u(t)v'(t)\,dt$$
$$= \Big[\frac{2t\sqrt{t}}{3}\sqrt{\ln(t)}\Big]_e^x - \int_e^x \frac{2t\sqrt{t}}{3}\,\frac{1}{2t\sqrt{\ln(t)}}\,dt = \frac{2x\sqrt{\ln(x)}}{3} - \frac{2e\sqrt{e}}{3} - \frac{1}{3}\int_e^x \sqrt{\frac{t}{\ln(t)}}\,dt$$

On note alors que $t \geqslant e$ implique $\ln(t) \geqslant 1$, donc $0 \leqslant \displaystyle\int_e^x \sqrt{\frac{t}{\ln(t)}}\,dt \leqslant \int_e^x \sqrt{t}\,dt = \Big[\frac{2t\sqrt{t}}{3}\Big]_e^x = \frac{2(x\sqrt{x} - e\sqrt{e})}{3}$.

On constate que $\displaystyle\int_e^x \sqrt{\frac{t}{\ln(t)}}\,dt$ est négligeable devant $x\sqrt{x\ln(x)}$ lorsque $x \to +\infty$. Il en est clairement de même des constantes $\dfrac{2e\sqrt{e}}{3}$ et $f(e)$, ce qui permet de conclure : $f(x) = \dfrac{2x\sqrt{\ln(x)}}{3} + o\Big(\dfrac{2x\sqrt{\ln(x)}}{3}\Big)$ lorsque $x \to +\infty$, ce qui s'écrit aussi : $\boxed{f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{2x\sqrt{\ln(x)}}{3}}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Effectuons le changement de variable $u = t - 1$: $f(x) = \displaystyle\int_1^x \sqrt{t\ln(t)}\,dt = \int_0^{x-1} \sqrt{(1+u)\ln(1+u)}\,du$. Or $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$, donc $\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{u}$ ce qui nous amène à établir en toute rigueur :

$$f(x) \underset{x\to 1+}{\sim} \int_0^{x-1} \sqrt{u}\,du = \Big[\frac{2u\sqrt{u}}{3}\Big]_0^{x-1} = \frac{2(x-1)^{3/2}}{3}$$

Pour ce faire, fixons $\varepsilon > 0$. Comme $\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{u}$, il existe $\alpha > 0$ tel que $0 \leqslant u \leqslant \alpha$ implique $\big|\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} - \sqrt{u}\big| \leqslant \varepsilon\sqrt{u}$. Soit alors $x \in [1, 1+\alpha]$; en intégrant la majoration précédente, on aura :

$$\left|\int_0^{x-1} \big(\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} - \sqrt{u}\big)\,du\right| \leqslant \int_0^{x-1} \big|\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} - \sqrt{u}\big|\,du \leqslant \int_0^{x-1} \varepsilon\sqrt{u}\,du = \frac{2\varepsilon(x-1)^{3/2}}{3}$$

Mais, par ailleurs :

$$\int_0^{x-1} \big(\sqrt{(1+u)\ln(1+u)} - \sqrt{u}\big)\,du = \int_0^{x-1} \sqrt{(1+u)\ln(1+u)}\,du - \int_0^{x-1} \sqrt{u}\,du = f(x) - \frac{2(x-1)^{3/2}}{3}$$

Concluons : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $x \in [1, 1+\alpha] \Rightarrow \left|f(x) - \dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3}\right| \leqslant \dfrac{2\varepsilon(x-1)^{3/2}}{3}$; ceci revient à dire que $\boxed{f(x) \underset{x\to 1^+}{\sim} \dfrac{2(x-1)^{3/2}}{3}}$.

Exercice 2 : énoncé

► Notons $f : x \mapsto 1 + \arctan\Big(\dfrac{x}{x+2}\Big)$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Explicitez l'ensemble de définition D_f de f, sous forme de réunion d'intervalles disjoints.

$\boxed{\text{Q2}}$ Déterminez la limite de f en chacune des bornes de chacun de ces intervalles.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que f est dérivable sur son ensemble de définition, et explicitez $f'(x)$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Dressez le tableau des variations de f.

$\boxed{\text{Q5}}$ Donnez l'allure de la courbe représentative de f.

$\boxed{\text{Q6}}$ Décrivez l'image de f sous forme de réunion d'intervalles disjoints.

$\boxed{\text{Q7}}$ Calculez $f\big(1+\sqrt{3}\big)$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Résolvez l'équation $f(x) = 1 + \dfrac{\pi}{3}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Explicitez le $DL_1(0)$ de f.

Exercice 2 : corrigé

Q1 • $f(x)$ est défini sauf si $x = -2$, donc $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$.

Q2 • Lorsque x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$, la fraction $\dfrac{x}{x+2}$ tend vers 1, donc $f(x)$ tend vers $1 + \dfrac{\pi}{4}$. On peut être un peu plus précis : pour $x < -2$, on a $\dfrac{x}{x+2} > 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right)^+$; de même, pour $x > -2$, on a $\dfrac{x}{x+2} < 1$, donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \left(1 + \dfrac{\pi}{4}\right)^-$

• Lorsque x tend vers -2^-, la fraction $\dfrac{x}{x+2}$ tend vers $+\infty$, et par suite $f(x)$ tend vers $1 + \dfrac{\pi}{2}$.

• Lorsque x tend vers -2^+, la fraction $\dfrac{x}{x+2}$ tend vers $-\infty$, et par suite $f(x)$ tend vers $1 - \dfrac{\pi}{2}$.

Q3 • f est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^\infty$) sur un chacun des deux intervalles qui constituent son ensemble de définition, en tant que composée de fonctions qui le sont.

• Notons $u : x \neq -2 \mapsto \dfrac{x}{x+2}$, ainsi $f = 1 + (\arctan \circ u)$ puis $f' = u' \times (\arctan' \circ u) = \dfrac{u'}{1+u^2}$. Or $u'(x) = \dfrac{2}{(x+2)^2}$, donc :

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2}{(x+2)^2}}{1 + \left(\dfrac{x}{x+2}\right)^2} = \frac{2}{(x+2)^2 + x^2} = \frac{2}{2x^2 + 4x + 4} = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$$

Q4 • Le discriminant du trinôme x^2+x+2 est $\Delta = 1^2 - 4\times1\times2 = 1 - 8 = -7 < 0$, donc ce trinôme garde un signe constant, à savoir strictement positif. Par suite, $f'(x) > 0$ pour tout $x \neq -2$: donc f est strictement croissante sur chacun des deux intervalles qui constituent son ensemble de définition. Nous en déduisons le tableau de variation ci-contre.

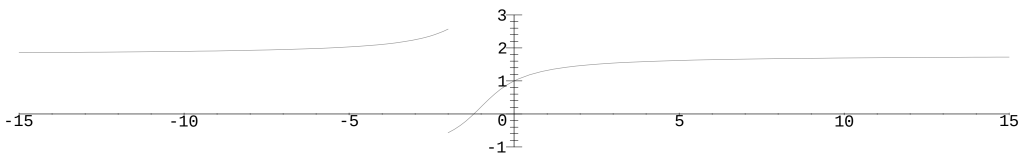
x	$-\infty$		-2			$+\infty$
f_n	$1+\pi/4$	$\nearrow$	$1+\pi/2$ ‖	$1-\pi/2$	$\nearrow$	$1+\pi/4$

Q5 • La courbe a été obtenue avec la litanie Maple suivante :

```
f := x -> 1 + arctan(x/(x+2));

plotsetup(ps, plotoutput = `c200205.ps`,
 plotoptions = `portrait,noborder,height=200,width=500`);

plot(f(x),x=-15..15,discont=true,y=-1..3,labels=[``,``]);
```



Q6 • La restriction de f à l'intervalle $\mathcal{I}_1 =]-\infty, -2[$ est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de $\mathcal{I}_1$ sur $\left]\lim\limits_{-\infty} f, \lim\limits_{(-2)^-} f\right[= \left]1 + \dfrac{\pi}{4}, 1 + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

• De même, la restriction de f à l'intervalle $\mathcal{I}_2 =]-2, +\infty[$ est continue et strictement croissante, donc réalise une bijection de $\mathcal{I}_2$ sur $\left]\lim\limits_{(-2)^+} f, \lim\limits_{+\infty} f\right[= \left]1 - \dfrac{\pi}{2}, 1 + \dfrac{\pi}{4}\right[$.

• De tout ceci, nous déduisons que $\boxed{\text{l'image de } f \text{ est l'intervalle } \left]1 - \dfrac{\pi}{2}, 1 + \dfrac{\pi}{2}\right[\text{, privé du point } 1 + \dfrac{\pi}{4}}$.

Q7 Nous aurons $f\left(1 + \sqrt{3}\right) = 1 + \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2+1+\sqrt{3}}\right) = 1 + \arctan\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right) = 1 + \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \boxed{1 + \dfrac{\pi}{6}}$.

Q8 • $1+\dfrac{\pi}{3}$ appartient à l'image de f, donc l'équation proposée possède une et une seule solution. Pour la déterminer, nous pouvons procéder par condition nécessaire :

$$f(x)=1+\frac{\pi}{3}\Rightarrow 1+\arctan\Big(\frac{x}{x+2}\Big)=1+\frac{\pi}{3}\Rightarrow\frac{x}{x+2}=\tan\Big(\frac{\pi}{3}\Big)\Rightarrow\frac{x}{x+2}=\sqrt{3}\Rightarrow x=(x+2)\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow(1-\sqrt{3})x=2\sqrt{3}\Rightarrow x=\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}+6}{1-3}=\frac{2\sqrt{3}+6}{-2}$$

Conclusion : $\boxed{x=-\sqrt{3}-3}$.

Q9 $f(0)=1$; d'après Q3, $f'(0)=1/2$. Avec la formule de Taylor-Young, nous en déduisons :

$$\boxed{f(x)=1+\frac{x}{2}+o(x)}$$

Exercice 3 : énoncé

▶ Notons $f:\ t\neq 0\mapsto\dfrac{\ln(1+t^2)}{t}$.

Q1 Calculez $\ell=\lim\limits_{t\to 0}f(t)$.

▶ Notons g le prolongement par continuité de f : $g(t)=f(t)$ pour $t\neq 0$, et $g(0)=\ell$. Clairement, g est continue sur $\mathbb{R}$.

Q2 Calculez $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g(t)-g(0)}{t}$; g est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$ entier ?

Q3 Notons $u:\ t>0\mapsto t^2g'(t)$. Explicitez $u'(t)$, puis montrez que l'équation $u(t)=0$ possède, dans l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, une et une seule solution, que nous noterons α.

▶ Une calculatrice nous donne $\alpha\approx 1.98$ et $g(\alpha)\approx 0.81$

Q4 Dressez alors le tableau des variations de g, puis tracez la courbe représentative de cette fonction.

▶ Notons $G:\ x\in\mathbb{R}\mapsto\displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$.

Q5 Pour $x>0$, notons $H(x)=\displaystyle\int_1^x\frac{1}{t}\ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\,dt$. Justifiez la relation $G(x)=G(1)+\ln^2(x)+H(x)$.

Q6 Pour $x\geqslant 1$, justifiez l'encadrement $0\leqslant H(x)\leqslant\ln(2)\ln(x)$.

▶ Si nous demandons à `maple` d'évaluer $G(1)$, cet excellent logiciel se lance dans une longue réflexion, au terme de laquelle il nous propose la valeur $\dfrac{\pi^2}{24}$. Nous allons établir ce résultat en toute rigueur, en nous appuyant sur la relation (admise)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

Q7 Notons $\varphi:\ t>-1\mapsto\ln(1+t)$. Pour $k\geqslant 1$ et $t>-1$, explicitez $\varphi^{(k)}(t)$.

Q8 Notons $R_n\ :\ x\ \mapsto\ g(x)-\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{k}$. En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, établissez pour $x>0$ la relation suivante :

$$R_n(x)=\frac{1}{x}\int_0^{x^2}\frac{(t-x^2)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt$$

Q9 Justifiez alors la majoration $\big|R_n(x)\big|\leqslant\dfrac{x^{2n+1}}{n+1}$ pour $x>0$.

Q10 En déduire une majoration de $E(x)=\left|G(x)-\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{2k^2}\right|$, toujours pour $x>0$.

Q11 Pour $n\geqslant 1$, notons $S_n=\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k^2}$. Exprimez $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2p}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$ au moyen de deux termes de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$

Q12 Concluez !

Exercice 3 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ Il est bien connu que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$. Alors $f(t)=\dfrac{\ln(1+t^2)}{t}=t\dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2}\xrightarrow[t\to 0]{}0$. Donc $\boxed{\ell=0}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ En utilisant la même formule : $\dfrac{g(t)-g(0)}{t}=\dfrac{\ln(1+t^2)}{t^2}\xrightarrow[t\to 0]{}1$. Ceci nous montre que g est dérivable en 0, et que $g'(0)=1$; par ailleurs, g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$, en tant que quotient de deux fonctions qui le sont, celle du dénominateur ne s'annulant pas.

$\boxed{\text{Q3}}$ • Pour $t>0$, $g'(t)=\dfrac{\frac{2t^2}{1+t^2}-\ln(1+t^2)}{t^2}$ donc $u(t)=\dfrac{2t^2}{1+t^2}-\ln(1+t^2)$.

• Écrivons ceci $u(t)=2-\dfrac{2}{1+t^2}-\ln(1+t^2)$. Alors $u'(t)=\dfrac{4t}{(1+t^2)^2}-\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$. Sur l'intervalle $]0,1[$ u' est strictement positive, donc u croît strictement ; comme u est continue sur $[0,1]$, la valeur $u(0)=0$ montre que $u(t)>0$ pour tout $t\in\,]0,1]$. Sur l'intervalle $]1,+\infty[$ nous avons $u'(t)<0$ donc u décroît strictement ; étant continue, elle réalise une bijection de $]1,+\infty[$ sur l'intervalle $]-\infty,1-\ln(2)[$ puisque $u(1)=1-\ln(2)>0$ et $u(t)\xrightarrow[t\to+\infty]{}-\infty$. Ceci permet d'affirmer que l'équation $u(t)=0$ possède une et une seule solution sur $\mathbb{R}_*^+$; de plus, cette solution α est strictement supérieure à 1.

▶ Les valeurs $\alpha=1.980291300$ et $g(\alpha)=.8047423427$ ont été obtenues avec le script `maple` suivant :

```
g := proc(t); if t=0 then 0 else ln(1+t*t)/t fi end;
gprime := proc(t); diff(g(t),t) end;
u := proc(t); t*t*gprime(t) end;
alpha := fsolve(u(t)=0,t);
g(alpha);
```

$\boxed{\text{Q4}}$ Notons que g est impaire. Sur l'intervalle $[0,\alpha[$ g' est strictement positive, donc g est croissante ; sur l'intervalle $]\alpha,+\infty[$ g' est négative, et g est décroissante. Pour le comportement de g au voisinage de $+\infty$, nous pouvons écrire :

$$g(t)=\frac{\ln(1+t^2)}{t}=\frac{2\ln(t)+\ln(1+t^{-2})}{t}=\frac{2\ln(t)}{t}+\frac{\ln(1+t^{-2})}{t}\xrightarrow[t\to+\infty]{}0$$

Donc la droite d'équation $y=0$ est asymptote à la courbe représentative de g. Voir en dernière page la courbe et les commentaires au sujet de sa production.

$\boxed{\text{Q5}}$ Reprenons la décomposition utilisée dans la question précédente :

$$\begin{aligned}G(x)=\int_0^x g(t)\,dt&=\int_0^1 g(t)\,dt+\int_1^x g(t)\,dt=G(1)+\int_1^x\frac{2\ln(t)}{t}\,dt+\int_1^x\frac{\ln(1+t^{-2})}{t}dt\\&=G(1)+\left[\ln(t)^2\right]_0^x+\int_1^x\frac{1}{t}\ln\Big(1+\frac{1}{t^2}\Big)\,dt=G(1)+\ln(x)^2+H(x)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit $x\geqslant 1$; pour $1\leqslant t\leqslant x$, nous avons certainement $0\leqslant\dfrac{1}{t^2}\leqslant 1$, donc $0\leqslant\dfrac{1}{t}\ln\Big(1+\dfrac{1}{t^2}\Big)\leqslant\dfrac{\ln(2)}{t}$. D'où par intégration : $0\leqslant H(x)\leqslant\displaystyle\int_1^x\frac{\ln(2)}{t}\,dt=\ln(2)\ln(x)$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Nous obtenons facilement $\varphi'(t)=\dfrac{1}{1+t}$; $\varphi''(t)=\dfrac{-1}{(1+t)^2}$ et $\varphi'''(t)=\dfrac{2}{(1+t)^3}$. Supposons acquise la relation $\varphi^{(k)}(t)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^k}$ au rang $k\geqslant 1$; alors :

$$\varphi^{(k+1)}(t)=\frac{-k(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+t)^{k+1}}=\frac{(-1)^k k!}{(1+t)^{k+1}}$$

ce qui établit l'assertion au rang $k+1$ et, par récurrence, pour tout $k\geqslant 1$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction φ, sur l'intervalle $[0,x^2]$:

$$\ln(1+x^2)=\varphi(x^2)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}(x^2)^k+\int_0^{x^2}\frac{(x^2-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

Notons que $\varphi(0) = 0$ et $\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$ pour $k \geqslant 1$. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned}
\ln(1+x^2) &= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k} + \int_0^{x^2} \frac{(x^2-t)^n}{n!}\,\frac{(-1)^n n!}{(1+t)^{n+1}}\,dt \\
&= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{k} + \int_0^{x^2} \frac{(t-x^2)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à diviser les deux membres par $x \neq 0$ pour obtenir la formule de l'énoncé.

$\boxed{\text{Q9}}$ La majoration est claire pour $x = 0$ (les deux membres sont nuls). Par raison de parité, il ne reste qu'à étudier le cas $x > 0$. Notons que $(1+t)^{n+1} \geqslant 1$ pour $t \in [0, x^2]$. Alors :

$$\big|R_n(x)\big| = \left|\frac{1}{x}\int_0^{x^2} \frac{(t-x^2)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{x}\int_0^{x^2} (x^2-t)^n\,dt = \frac{1}{x}\Big[-\frac{(x^2-t)^{n+1}}{n+1}\Big]_0^{x^2} = \frac{1}{x}\,\frac{(x^2)^{n+1}}{n+1} = \frac{x^{2n+1}}{n+1}$$

$\boxed{\text{Q10}}$ Clairement, E est paire et $E(0) = 0$. Il suffit donc d'obtenir une majoration pour $x > 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\int_0^x R_n(t)\,dt &= \int_0^x \Big(g(t) - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}t^{2k-1}}{k}\Big)\,dt = G(x) - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \int_0^x \frac{(-1)^{k-1}t^{2k-1}}{k}\,dt \\
&= G(x) - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \Big[\frac{(-1)^{k-1}t^{2k}}{2k^2}\Big]_0^x = G(x) - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{2k^2}
\end{aligned}$$

Dans ces conditions :

$$\begin{aligned}
E(x) &= \left|G(x) - \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k}}{2k^2}\right| = \left|\int_0^x R_n(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \int_0^x \big|R_n(t)\big|\,dt \leqslant \int_0^x \frac{t^{2n+1}}{n+1}\,dt = \frac{x^{2n+2}}{2(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q11}}$ Il suffit de mettre en évidence un télescopage entre la somme proposée et S_{2p} :

$$S_{2p} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{1}{k^2} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{1-(-1)^{k-1}}{k^2}$$

Or $1 - (-1)^{k-1} = 1 + (-1)^k$ est nul si k est impair, et vaut 2 si k est pair. Donc :

$$S_{2p} - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \sum_{1\leqslant 2k\leqslant 2p} \frac{2}{(2k)^2} = \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k\leqslant p} \frac{1}{k^2} = \frac{S_p}{2}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = S_{2p} - \frac{S_p}{2}$.

$\boxed{\text{Q12}}$ Remplaçons x par 1 et n par $2p$ dans la majoration de Q10 ; il vient :

$$\left|G(1) - \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2}\right| \leqslant \frac{1}{2(2p+1)^2}$$

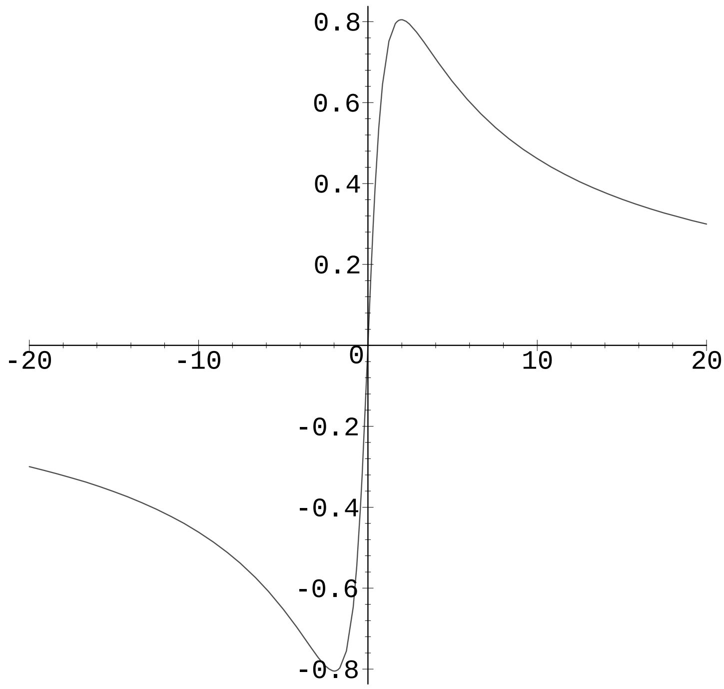
ce qui montre clairement que

$$\begin{aligned}
G(1) &= \lim_{p\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{2k^2} = \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant 2p} \frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty}\Big(S_{2p} - \frac{S_p}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\lim_{p\to\infty} S_{2p} - \frac{1}{4}\lim_{p\to\infty} S_p = \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{24}
\end{aligned}$$

► Le tracé ci-dessous a été obtenu au moyen des incantations suivantes :

```
plotsetup(ps,plotoutput=‘d199702.ps‘,
  plotoptions=‘portrait,noborder,height=469,width=469‘);
plot(g,-20..20);
```

Nous récupérons dans le fichier `d199702.ps` une description du tracé en langage *PostScript* ; celle-ci est incorporée au présent document en vue de l'impression. Pas de colle, pas de ciseaux.



Exercice 4 : énoncé

▶ Notons $f : x > 0 \mapsto x^x$.

$\boxed{\text{Q1}}$ Déterminez la limite ℓ de f à droite de 0. Nous considérons désormais que f a été prolongée par continuité à droite de 0 en définissant $f(0) = \ell$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Calculez $f'(x)$ pour $x > 0$. f est-elle dérivable à droite de 0 ? Étudiez rapidement les variations de f et tracez sa courbe représentative.

$\boxed{\text{Q3}}$ Montrez que la restriction g de f à l'intervalle $\mathcal{J} =]1/e, +\infty[$ réalise une bijection, de classe $\mathcal{C}^\infty$, de cet intervalle sur un intervalle $\mathcal{K}$ que vous préciserez.

$\boxed{\text{Q4}}$ Notons h la bijection réciproque de g. Montrez que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{K}$, puis justifiez la formule $xh'(x) = \dfrac{h(x)}{h(x) + \ln(x)}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Montrez que $h(x)$ est négligeable devant $\ln x$ lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Donnez un équivalent *simple* de $\ln\big(h(x)\big)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 4 : corrigé

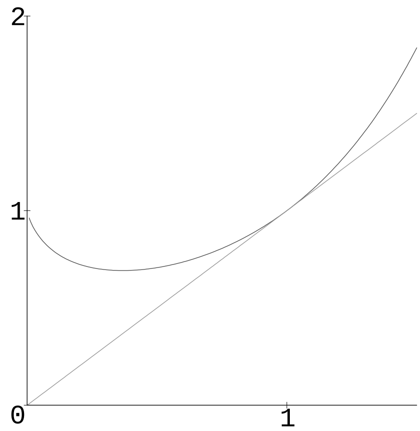
$\boxed{\text{Q1}}$ $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$, donc $x^x = \exp(x\ln(x)) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1^-$. Ainsi $\boxed{\ell = 1}$.

$\boxed{\text{Q2}}$ • $f'(x) = (1 + \ln(x))x^x = \boxed{\big(1 + \ln(x)\big)f(x)}$.

• Utilisons l'équivalent classique $e^u \underset{u\to 0}{\sim} u$; il vient $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{e^{x\ln(x)} - 1}{x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$, donc f n'est pas dérivable à droite de 0. La courbe représentative possède une demi-tangente « verticale », dirigée vers le bas.

• Sur $\mathbb{R}_+^*$, f' s'annule en changeant de signe en $1/e$. Sur l'intervalle $]0, 1/e[$ f' est strictement négative donc f décroît strictement ; sur l'intervalle $]1/e, +\infty[$ f' est strictement positive donc f croît strictement.

• $1/e \approx 0.37$; $f(1/e) = e^{-1/e} \approx 0.69$; $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. De plus $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{e^{x\ln(x)}}{e^{\ln(x)}} = e^{(x-1)\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc la courbe représentative de f possède une direction asymptotique « verticale ». Notons que $f(1) = f'(1) = 1$, donc $\mathcal{C}_f$ passe par le point de coordonnées $(1, 1)$ et a pour tangente en ce point la droite d'équation $y = x$.



$\boxed{\text{Q3}}$ • g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ en tant que composée de $x \in \mathcal{J} \mapsto x\ln(x)$, et de la fonction exponentielle, toutes deux de classe $\mathcal{C}^\infty$.

• g est continue (car de classe $\mathcal{C}^\infty$) et strictement croissante ; elle réalise donc une bijection de $\mathcal{J} =]1/e, +\infty[$ sur l'intervalle $\mathcal{K} = \Big]g(1/e), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)\Big[=]e^{-1/e}, +\infty[$.

$\boxed{\text{Q4}}$ • La dérivée de g ne s'annule pas, sur $\mathcal{J}$; comme g est de classe $\mathcal{C}^\infty$, ceci permet d'affirmer que sa bijection réciproque h est elle-même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{K}$.

• Pour $x \in \mathcal{K}$, on aura : $h'(x) = (g^{-1})'(x) = \dfrac{1}{(g' \circ g^{-1})(x)} = \dfrac{1}{g'(h(x))}$. Mais $g'\big(h(x)\big) = f'\big(h(x)\big) = \big(1 + \ln\big(h(x)\big)\big)f\big(h(x)\big) = x\big(1 + \ln\big(h(x)\big)\big)$ car $f\big(h(x)\big) = g\big(g^{-1}(x)\big) = x$. Nous pouvons aussi écrire $x = g\big(g^{-1}(x)\big) = e^{h(x)\ln(h(x))}$ donc $\ln(x) = h(x)\ln\big(h(x)\big)$; nous en déduisons $\ln h(x) = \dfrac{\ln(x)}{h(x)}$. Finalement $h'(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln(h(x))} = \dfrac{1}{x\big(1 + \frac{\ln(x)}{h(x)}\big)} = \boxed{\dfrac{h(x)}{x\big(h(x) + \ln(x)\big)}}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ $\dfrac{h(x)}{\ln(x)} = \dfrac{1}{\ln(h(x))} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puisque $h(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{\text{Q6}}$ De $\ln(x) = h(x)\ln\big(h(x)\big)$ nous déduisons $\ln(\ln(x)) = \ln\big(h(x)\big) + \ln\big(\ln\big(h(x)\big)\big)$; $\ln(h(x)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc $\ln\big(\ln\big(h(x)\big)\big)$ est négligeable devant $\ln(h(x))$ et finalement $\boxed{\ln\big(h(x)\big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(\ln(x))}$.

Exercice 5 : énoncé

$\boxed{\text{Q1}}$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$; soient u et v deux éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Justifiez l'existence de la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$$

Justifiez également la dérivabilité de g.

► Dans toute la suite, nous prenons $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\,dt$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Explicitez $g'(x)$.

$\boxed{\text{Q3}}$ ⋆ En déduire le développement limité à l'ordre 5 de g au voisinage de 0.

$\boxed{\text{Q4}}$ Quelle est la parité de g ?

$\boxed{\text{Q5}}$ Pour $x \neq 0$, établir $g\Big(\dfrac{1}{2x}\Big) = g(x)$.

$\boxed{\text{Q6}}$ Pour $t \neq 0$, établissez l'encadrement $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ En déduire, pour $x > 0$, l'encadrement $\arctan(2x) - \arctan(x) \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.

$\boxed{\text{Q8}}$ ⋆ Soit $H : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x \big(\arctan(2t) - \arctan(t)\big)\,dt$. Explicitez $H(x)$ et calculez $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{H(x)}{\ln(x)}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ ⋆ Déduisez de l'étude précédente un équivalent *simple* de $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ lorsque x tend $+\infty$.

Exercice 5 : corrigé

$\boxed{\text{Q1}}$ f étant continue sur $\mathbb{R}$, l'intégrale considérée a toujours un sens. Soit F une primitive sur $\mathbb{R}$ de f. On peut écrire :

$$\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = \big[F(t)\big]_{t=u(x)}^{t=v(x)} = F\big(v(x)\big) - F\big(u(x)\big) = (F \circ v - F \circ u)(x)$$

Ainsi $g = F \circ v - F \circ u$; les fonctions F, u et v étant dérivables, il en est de même de g. On aura $g' = v' \times F' \circ v - u' \times F' \circ u = v' \times f \circ v - u' \times f \circ u$.

$\boxed{\text{Q2}}$ Il suffit d'appliquer la formule précédente, avec $u(x) = x$, $v(x) = 2x$ et $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$; il vient $\boxed{g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1+4x^2+16x^4}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+x^4}}}$.

$\boxed{\text{Q3}}$ On sait que, lorsque u tend vers 0 : $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2 + o(u^2)$.

Avec $\alpha = \frac{1}{2}$, on aura en particulier : $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2} = 1 - \dfrac{1}{2}u + \dfrac{3}{8}u^2 + o(u^2)$.

On en déduit :

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2\Big(1 - \frac{1}{2}(4x^2+16x^4) + \frac{3}{8}(4x^2+16x^4)^2 + o(x^4)\Big) - \Big(1 - \frac{1}{2}(x^2+x^4) + \frac{3}{8}(x^2+x^4)^2 + o(x^4)\Big) \\ &= 2\Big(1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\Big) - \Big(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)\Big) = 1 - \frac{7}{2}x^2 - \frac{31}{8}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Puis, par intégration du $DL_4(0)$ de g' : $\boxed{g(x) = g(0) + x - \dfrac{7}{6}x^3 - \dfrac{31}{40}x^5 + o(x^5) = x - \dfrac{7}{6}x^3 - \dfrac{31}{40}x^5 + o(x^5)}$.

$\boxed{\text{Q4}}$ Utilisons le changement de variable $u = -t$:

$$g(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = \int_x^{2x} \frac{-du}{\sqrt{1+(-u)^2+(-u)^4}} = -\int_x^{2x} \frac{du}{\sqrt{1+u^2+u^4}} = -g(x)$$

Et ce quel que soit le réel x ; donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Utilisons cette fois le changement de variable $u = t^{-1}$; ceci est licite, car l'intervalle d'intégration ne contient pas 0.

$$\begin{aligned} g\Big(\frac{1}{2x}\Big) &= \int_{1/2x}^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}}\,dt = \int_{2x}^{x} \frac{1}{\sqrt{1+u^{-2}+u^{-4}}} \times \frac{-du}{u^2} \\ &= \int_x^{2x} \frac{1}{u^2\sqrt{1+u^{-2}+u^{-4}}}\,du = \int_x^{2x} \frac{1}{u^2\sqrt{u^4+u^2+1}}\,du = g(x) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Q6}}$ On a clairement $0 < t^4 \leqslant 1 + t^2 + t^4 \leqslant 1 + 2t^2 + t^4 = (1+t^2)^2$, donc $0 < t^2 \leqslant \sqrt{1+t^2+t^4} \leqslant 1 + t^2$ puis en passant aux inverses $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Intégrons l'encadrement précédent sur l'intervalle $[x, 2x]$, pour $x > 0$:

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} \leqslant \int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$$

Mais $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_{t=x}^{t=2x} = \arctan 2x - \arctan x$; $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2+t^4}} = g(x)$; et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2} = \Big[-\frac{1}{t}\Big]_{t=x}^{t=2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$ d'où l'encadrement demandé.

$\boxed{\text{Q8}}$ • Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x (\arctan 2t - \arctan t)\, dt \\ &= \big[t(\arctan 2t - \arctan t)\big]_{t=0}^{t=x} - \int_0^x t\Big(\frac{2}{1+(2t)^2} - \frac{1}{1+t^2}\Big)\, dt \\ &= x(\arctan 2x - \arctan x) - \int_0^x \Big(\frac{2t}{1+4t^2} - \frac{t}{1+t^2}\Big)\, dt \\ &= x(\arctan 2x - \arctan x) - \Big[\frac{\ln(1+4t^2)}{4} - \frac{\ln(1+t^2)}{2}\Big]_{t=0}^{t=x} \\ &= x(\arctan 2x - \arctan x) - \frac{\ln(1+4x^2)}{4} + \frac{\ln(1+x^2)}{2} \end{aligned}$$

• Pour $t > 0$, on a $\arctan t + \arctan \frac{1}{t} = \frac{\pi}{2}$; ceci permet d'écrire, pour $x > 0$:

$$\arctan 2x - \arctan x = \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{2x}\Big) - \Big(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\Big) = \arctan\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{2x}$$

On sait que $\arctan u = u + o(u)$ lorsque u tend vers 0 ; donc, lorsque x tend vers $+\infty$: $\arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$ et $\arctan\dfrac{1}{2x} = \dfrac{1}{2x} + o\Big(\dfrac{1}{2x}\Big)$ d'où $\arctan 2x - \arctan x = \dfrac{1}{2x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)$; ainsi $\boxed{x(\arctan 2x - \arctan x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}}$.

• Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln x}\Big(\frac{\ln(1+x^2)}{2} - \frac{\ln(1+4x^2)}{4}\Big) &= \frac{1}{\ln x}\Big(\frac{2\ln x + \ln(1+x^{-2})}{2} - \frac{2\ln x + \ln(4+x^{-2})}{4}\Big) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\ln(1+x^{-2})}{2\ln x} - \frac{\ln(4+x^{-2})}{4\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{H(x)}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Il convient d'être prudent : il est interdit intégrer l'encadrement obtenu en Q6 sur l'intervalle $[0, x]$! Nous l'intégrons donc sur l'intervalle $[1, x]$:

$$\int_1^x (\arctan 2t - \arctan t)\, dt \leqslant \int_1^x g(t)\, dt \leqslant \int_1^x \frac{dt}{2t}$$

On a déjà $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{2t} = \Big[\frac{\ln t}{2}\Big]_{t=1}^{t=x} = \frac{\ln x}{2}$. D'autre part :

$$\int_1^x (\arctan 2t - \arctan t)\, dt = \int_0^x (\arctan 2t - \arctan t)\, dt - \int_0^1 (\arctan 2t - \arctan t)\, dt = H(x) - H(1)$$

On vient de voir que $H(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2}$. $H(1)$ est une quantité fixe, donc négligeable devant $\dfrac{\ln x}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit $\displaystyle\int_1^x (\arctan 2t - \arctan t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2}$ puis, avec le « théorème des trois équivalents » : $\displaystyle\int_1^x g(t)\, dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\ln x}{2}$. Il ne reste plus qu'à écrire

$$G(x) = \int_0^x g(t)\, dt = \int_0^1 g(t)\, dt + \int_1^x g(t)\, dt$$

et à remarquer que la première intégrale du membre de droite est finie, donc négligeable devant la deuxième, lorsque x tend vers $+\infty$; ce qui permet finalement d'affirmer que $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{2}}$.