Mini-problème

► Notons $\mathcal{E}$ l'équation différentielle $2(x-1)y' + y = x^2 \sin(x)$.

Q1 Montrez que cette équation possède sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ une et une seule solution f vérifiant $f(0) = 0$.

► Nous nous proposons de montrer que le $DL_4(0)$ de f est $-\dfrac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Q2 Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$.

Q3 Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Q4 En appliquant aux deux membres de $\mathcal{E}$ l'opérateur $\dfrac{d}{dx}$, déterminez la valeur de $f''(0)$.

Q5 Déterminez de même les valeurs de $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Q6 Terminez le problème !

Mini-problème

► Nous nous proposons de déterminer un équivalent *simple*, quand $x \to 0$, de $f : x \mapsto \big(2+\cos(x)\big)\big(2+\operatorname{ch}(x)\big) - 9$.

Q1 Justifiez l'affirmation suivante : il existe *probablement* un naturel n pair tel que $\dfrac{f(2x)}{f(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} 2^n$.

Q2 Avec une calculatrice, évaluez $\dfrac{f(0{,}2)}{f(0{,}1)}$. Quelle est, selon vous, la valeur de n ?

Q3 Rappelez les $DL_{2p}(0)$ de $\cos(x)$ et $\operatorname{ch}(x)$.

Q4 Déterminez le $DL_n(0)$ de f, pour la valeur de n obtenue plus haut.

Q5 Concluez. Vous devriez trouver $\dfrac{x^8}{2016}$.

Q6 Même question avec $\operatorname{ch}(x) - \dfrac{12+5x^2}{12-x^2}$ quand $x \to 0$. *Réponse* : $-\dfrac{x^6}{480}$.

Mini-problème

► Nous nous proposons de montrer que le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin^2(x)} - \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$ est $f(x) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4x^4}{189} + o(x^4)$.

Q1 Donnez des équivalents simples de $\sin^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q2 Réduisons $f(x)$ sous forme d'une seule fraction, dont le dénominateur est $\sin^2(x)\operatorname{sh}^2(x)$. À quel ordre faudra-t-il pousser le DL du numérateur pour obtenir le résultat attendu ?

Q3 Quelle(s) remarque(s) simple(s) pouvez-vous faire, à ce stade, afin de diminuer le volume des calculs ?

Q4 Terminez le travail demandé !

Q5 En suivant les mêmes idées, calculez $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\arctan(x) - \sin^2(x)}{x^6}$. *Réponse* : $\dfrac{7}{45}$.

Mini-problème

► Nous nous proposons de déterminer le $DL_{10}(0)$ de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Q1 Justifiez l'existence de f et précisez son ensemble de définition.

Q2 Montrez que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Q3 Déterminez le naturel n tel qu'un $DL_n(0)$ de la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ permette d'obtenir le DL_{10} demandé.

Q4 Justifiez l'affirmation suivante : le $DL_2(0)$ de $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+u}}$ suffira.

Q5 Déterminez le $DL_9(0)$ de φ.

Q6 En déduire le DL demandé.