Produit de deux D.L.

Nous calculons le $DL_6(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \tan(x)\tan(2x)$. Remarquons que la parité de tan va alléger les calculs. L'absence de terme constant va également nous faciliter la vie : le $DL_5(0)$ de tan nous suffira. Rappel : ce $DL_5(0)$ est $\tan(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$. Le calcul détaillé du produit n'a pas été reproduit ici :

$$\begin{aligned}\tan(x)\tan(2x) &= \Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)\Big) \times \Big(2x + \frac{8x^3}{3} + \frac{65x^5}{15} + o(x^5)\Big)\\ &= \boxed{2x^2 + \frac{10x^4}{3} + \frac{244x^6}{45} + o(x^6)}\end{aligned}$$

Quotient de deux D.L.

Nous calculons le $DL_5(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1-x-x^2}$.

Notons $u = x + x^2$; alors $f(x) = \dfrac{x}{1-u}$, et $u \underset{x\to 0}{\sim} x$. il nous suffit donc du $DL_4(0)$, qui est $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5$. Quelques calculs préliminaires : $u^2 = x^2 + 2x^3 + x^4$; $u^3 = x^3 + 3x^4 + o(x^4)$; $u^4 = x^4 o(x^4)$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{x}{1-x-x^2} &= x\big(1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^5)\big)\big) = x\big(1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + o(x^4)\big)\\ &= \boxed{x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + o(x^5)}\end{aligned}$$

Composée de deux D.L.

Nous calculons le $DL_4(0)$ de la fonction $f : x \mapsto \exp\Big(x - \dfrac{x^2}{3}\Big)$.

Le $DL_4(0)$ de exp est $\exp(u) = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + \dfrac{o^4}{24} + o(u^4)$. Remplaçons u par $x - \dfrac{x^2}{3}$; il vient :

$$\begin{aligned}\exp\Big(x - \frac{x^2}{3}\Big) &= 1 + \Big(x - \frac{x^2}{3}\Big) + \frac{1}{2}\Big(x - \frac{x^2}{3}\Big)^2 + \frac{1}{6}\Big(x - \frac{x^2}{3}\Big)^3 + \frac{1}{24}\Big(x - \frac{x^2}{3}\Big)^4\\ &= \boxed{1 + x + \frac{x^2}{6} - \frac{x^3}{6} - \frac{5x^4}{72} + o(x^4)}\end{aligned}$$

Le calcul détaillé du produit n'a pas grand intérêt, et n'a donc pas été reproduit ici.

Un développement limité au voisinage de $+\infty$

Nous calculons un développement limité de $f : x \mapsto \exp(1/x) + \exp(2/x) + \exp(3/x)$, au voisinage de $+\infty$, à la précision $1/x^3$.

Notons que, lorsque x tend vers $+\infty$, les quantités $1/x$, $2/x$ et $3/x$ tendent vers 0. Notons $u = 1/x$: le calcul est immédiat, pour peu que l'on connaisse le $DL_3(0)$ de exp :

$$\begin{aligned}f(x) &= e^u + e^{2u} + e^{3u}\\ &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) + 1 + 2u + 2u^2 + \frac{4u^3}{3} + o(u^3) + 1 + 3u + \frac{9u^2}{2} + \frac{9u^3}{2} + o(u^3)\\ &= 3 + 6u + 7u^2 + 6u^3 + o(u^3)\end{aligned}$$

Finalement $\boxed{f(x) = 1 + \dfrac{6}{x} + \dfrac{7}{x^2} + \dfrac{6}{x^3} + o\Big(\dfrac{1}{x^3}\Big)}$.

Un développement limité généralisé

Rappel : cotan est la fonction $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Contrairement à une croyance populaire, cotan n'est pas l'inverse de tan : observez ce qui se passe en $k\pi/2$.

Nous voulons calculer un développement limité *généralisé* de la fonction $f : x \mapsto \operatorname{cotan}(x)\operatorname{cotan}(2x)$, à la précision $o(x^{-2})$. Observons que $f(x) = \dfrac{\cos(x)\cos(2x)}{\sin(x)\sin(2x)}$; lorsque x tend vers 0, le numérateur tend vers 1 et le dénominateur est équivalent à $2x^2$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2x^2}$. Nous allons écrire $f(x)$ sous la forme suivante : $f(x) = \dfrac{1}{2x^2} \times g(x)$, où $g(x) = \dfrac{2\cos(x)\cos(2x)}{2 \times \dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{\sin(2x)}{x}}$.

La présence du facteur $\dfrac{1}{2x^2}$ nous oblige à calculer des $DL_6(0)$ du numérateur et du dénominateur. Pour nous faciliter la vie, nous transformons les produits en sommes :

$$\begin{aligned}
2\cos(x)\cos(2x) &= \cos(x) + \cos(3x)\\
&= \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^4)\Big) + \Big(1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^4}{8} - \frac{81x^6}{80} + o(x^4)\Big)\\
&= 2 - 5x^2 + \frac{41x^4}{12} - \frac{73x^6}{72} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Pour l'étape suivante, nous devons calculer le $DL_8(0)$ de la fonction $x \mapsto \sin(x)\sin(2x)$; il vient :

$$\begin{aligned}
2\sin(x)\sin(2x) &= \cos(x) - \cos(3x)\\
&= \Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^4)\Big) - \Big(1 - \frac{9x^2}{2} + \frac{27x^4}{8} - \frac{81x^6}{80} + o(x^6)\Big)\\
&= 4x^2 - \frac{10x^4}{3} + \frac{91x^6}{90} - \frac{41x^6}{252} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Nous en déduisons $g(x) = 2 - \dfrac{10x^2}{3} + \dfrac{91x^4}{90} - \dfrac{41x^6}{252} + o(x^6)$.

Pour calculer le $DL_6(0)$ de $g(x)$, notons $u = \dfrac{10x^2}{3} - \dfrac{91x^4}{90} + \dfrac{41x^6}{252} + o(x^6)$; alors :

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{2-u} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-u/2} = \frac{1}{2} \times \big(1 + u/2 + u^2/4 + u^3/8 + o(u^2)\big)\\
&= \frac{1}{2} + \frac{5x^2}{24} + \frac{53x^4}{480} + \frac{17x^6}{432} + o(x^6)
\end{aligned}$$

Le calcul n'a pas été détaillé.

Il ne reste plus qu'à multiplier $\dfrac{1}{2x^2}$ par les $DL_6(0)$ de $2\cos(x)\cos(2x)$ et de $g(x)$. IL vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cotan}(2x) &= \frac{1}{2x^2} \times \Big(2 - 5x^2 + \frac{41x^4}{12} - \frac{73x^6}{72} + o(x^6)\Big) \times \Big(\frac{1}{4} + \frac{5x^2}{24} + \frac{53x^4}{480} + \frac{17x^6}{432} + o(x^6)\Big)\\
&= \boxed{\frac{1}{2x^2} - \frac{5}{6} + \frac{x^2}{30} + \frac{x^4}{189} + o(x^4)}
\end{aligned}$$

Un autre développement limité au voisinage de $+\infty$

Nous calculons le développement limité de la fonction $f : x \mapsto \exp\Big(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\Big)$, au voisinage de $+\infty$ et à la précision $1/x$.

Observons que $\sqrt{1/x}$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. Notons alors $u = 1/x$; avec le $DL_2(0)$ de la fonction exponentielle, nous aurons : $\boxed{f(x) = \exp\Big(\sqrt{\dfrac{1}{x}}\Big) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2x} + o\Big(\dfrac{1}{x}\Big)}$.