

Mini-problème

► Notons \mathcal{E} l'équation différentielle $2(x-1)y' + y = x^2 \sin(x)$.

Q1 Montrez que cette équation possède sur l'intervalle $] -\infty, 1[$ une et une seule solution f vérifiant $f(0) = 0$.

► Nous nous proposons de montrer que le $DL_4(0)$ de f est $-\frac{x^4}{8} + o(x^4)$.

Q2 Montrez que f est de classe \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 1[$.

Q3 Quelle est la valeur de $f'(0)$?

Q4 En appliquant aux deux membres de \mathcal{E} l'opérateur $\frac{d}{dx}$, déterminez la valeur de $f''(0)$.

Q5 Déterminez de même les valeurs de $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Q6 Terminez le problème !

Mini-problème

► Nous nous proposons de déterminer un équivalent *simple*, quand x tend vers 0, de $f : x \mapsto (2 + \cos(x))(2 + \operatorname{ch}(x)) - 9$.

Q1 Justifiez l'affirmation suivante : il existe *probablement* un naturel n pair tel que $\frac{f(2x)}{f(x)} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 2^n$.

Q2 Avec une calculatrice, évaluez $\frac{f(0,2)}{f(0,1)}$. Quelle est, selon vous, la valeur de n ?

Q3 Rappelez les $DL_{2p}(0)$ de $\cos(x)$ et $\operatorname{ch}(x)$.

Q4 Déterminez le $DL_n(0)$ de f , pour la valeur de n obtenue plus haut.

Q5 Concluez. Vous devriez trouver $\frac{x^8}{2016}$.

Q6 Même question avec $\operatorname{ch}(x) - \frac{12 + 5x^2}{12 - x^2}$ quand x tend vers 0. *Réponse* : $-\frac{x^6}{480}$.

Mini-problème

► Nous nous proposons de montrer que le $DL_4(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2(x)}$ est $f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4x^4}{189} + o(x^4)$.

Q1 Donnez des équivalents simples de $\sin^2(x)$ et $\operatorname{sh}^2(x)$ lorsque x tend vers 0.

Q2 Réduisons $f(x)$ sous forme d'une seule fraction, dont le dénominateur est $\sin^2(x) \operatorname{sh}^2(x)$. À quel ordre faudra-t-il pousser le DL du numérateur pour obtenir le résultat attendu ?

Q3 Quelle(s) remarque(s) simple(s) pouvez-vous faire, à ce stade, afin de diminuer le volume des calculs ?

Q4 Terminez le travail demandé !

Q5 En suivant les mêmes idées, calculez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arctan(x) - \sin^2(x)}{x^6}$. *Réponse* : $\frac{7}{45}$.

Mini-problème

► Nous nous proposons de déterminer le $DL_{10}(0)$ de $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

Q1 Justifiez l'existence de f et précisez son ensemble de définition.

Q2 Montrez que f est de classe \mathcal{C}^∞ .

Q3 Déterminez le naturel n tel qu'un $DL_n(0)$ de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ permette d'obtenir le DL_{10} demandé.

Q4 Justifiez l'affirmation suivante : le $DL_2(0)$ de $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+u}}$ suffira.

Q5 Déterminez le $DL_9(0)$ de φ .

Q6 En déduire le DL demandé.

[DevLim-1]