Le cours est-il bien compris ?

Q1 f est une fonction dérivable et paire ; que pouvez-vous dire de f' ?

Q2 f est une fonction dérivable et impaire ; que pouvez-vous dire de f' ?

Q3 f est une fonction dérivable et T-périodique ; que pouvez-vous dire de f' ?

Q4 f est une fonction n fois dérivable et paire ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?

Q5 f est une fonction n fois dérivable et impaire ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?

Q6 f est une fonction n fois dérivable et T-périodique ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?

Q7 Que pouvez-vous dire de $g \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R})$?

Questions de calcul

Q8 Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x/2)$. Explicitez $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.

Q9 Explicitez la dérivée n-ième de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 e^{-2x}$.

Q10 Explicitez la dérivée n-ième de $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-1}$.

Q11 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est bijective et de classe $\mathcal{D}^3$. Notons $g = f^{-1}$ et supposons que f' ne s'annule pas. Explicitez g'' et g''' en fonction de f^{-1}, f', f'' et f'''.

Q12 Explicitez la dérivée n-ième de $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. En déduire une expression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Q13 En calculant de deux manières différentes la dérivée n-ième de $x \mapsto e^{ax}e^{bx}$, déduisez la formule du binôme de la formule de Leibniz.

Un mini-problème

► Pour $n \geqslant 1$, notons $f_n : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^{n-1}e^{1/x}$.

Q1 Explicitez $(f_1)'(x)$, $(f_2)''(x)$ et $(f_3)'''(x)$.

Q2 Au vu des résultats précédents, quelle formule conjecturez-vous pour $(f_n)^{(n)}(x)$?

Q3 Prouvez que votre conjecture est correcte. Vous raisonnerez par récurrence, et vous utiliserez la formule de Leibniz.

Un mini-problème

► Pour $n \geqslant 1$, notons $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{n-1}\ln(x)$.

Q1 Expliciter $(g_1)'(x)$, $(g_2)''(x)$ et $(g_3)'''(x)$.

Q2 Au vu des résultats précédents, quelle formule conjecturez-vous pour $(g_n)^{(n)}(x)$?

Q3 Prouvez que votre conjecture est correcte, en raisonnant par récurrence.

Q4 En appliquant la formule de Leibniz au produit $x^{n-1}\ln(x)$, donnez une autre expression de $(g_n)^{(n)}(x)$.

Q5 Constatez que vous obtenez une preuve bien compliquée d'un résultat fort simple…