

Le cours est-il bien compris ?

- Q1 f est une fonction dérivable et paire ; que pouvez-vous dire de f' ?
- Q2 f est une fonction dérivable et impaire ; que pouvez-vous dire de f' ?
- Q3 f est une fonction dérivable et T -périodique ; que pouvez-vous dire de f' ?
- Q4 f est une fonction n fois dérivable et paire ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?
- Q5 f est une fonction n fois dérivable et impaire ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?
- Q6 f est une fonction n fois dérivable et T -périodique ; que pouvez-vous dire de $f^{(n)}$?
- Q7 Que pouvez-vous dire de $g \circ f$ lorsque $f \in \mathcal{C}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^q(\mathbb{R})$?

Questions de calcul

- Q8 Notons $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \arctan(x/2)$. Explicitez $f'(x)$, $f''(x)$ et $f'''(x)$.
- Q9 Explicitez la dérivée n -ième de $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 e^{-2x}$.
- Q10 Explicitez la dérivée n -ième de $f : x \mapsto \frac{x+1}{x-1}$.
- Q11 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ est bijective et de classe \mathcal{D}^3 . Notons $g = f^{-1}$ et supposons que f' ne s'annule pas. Explicitez g'' et g''' en fonction de f^{-1} , f' , f'' et f''' .
- Q12 Explicitez la dérivée n -ième de $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$. En déduire une expression simple de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
- Q13 En calculant de deux manières différentes la dérivée n -ième de $x \mapsto e^{ax} e^{bx}$, déduisez la formule du binôme de la formule de LEIBNIZ.

Un mini-problème

► Pour $n \geq 1$, notons $f_n : x \in \mathbb{R}^* \mapsto x^{n-1} e^{1/x}$.

- Q1 Explicitez $(f_1)'(x)$, $(f_2)''(x)$ et $(f_3)'''(x)$.
- Q2 Au vu des résultats précédents, quelle formule conjecturez-vous pour $(f_n)^{(n)}(x)$?
- Q3 Prouvez que votre conjecture est correcte. Vous raisonnerez par récurrence, et vous utiliserez la formule de LEIBNIZ.

Un mini-problème

► Pour $n \geq 1$, notons $g_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{n-1} \ln(x)$.

- Q1 Explicitez $(g_1)'(x)$, $(g_2)''(x)$ et $(g_3)'''(x)$.
- Q2 Au vu des résultats précédents, quelle formule conjecturez-vous pour $(g_n)^{(n)}(x)$?
- Q3 Prouvez que votre conjecture est correcte, en raisonnant par récurrence.
- Q4 En appliquant la formule de LEIBNIZ au produit $x^{n-1} \ln(x)$, donnez une autre expression de $(g_n)^{(n)}(x)$.
- Q5 Constatez que vous obtenez une preuve bien compliquée d'un résultat fort simple...