Un exercice corrigé d'analyse

Énoncé

Q1 • Soit P une fonction polynôme de degré n. Discutez le nombre de solutions réelles de l'équation $e^x = P(x)$.

Corrigé

- Remarquons que si $n = 0$, l'équation possède une solution si $x > 0$ et aucune si $x \leqslant 0$. Pour le cas $n = 1$, il est clair que le nombre de solutions peut être zéro (avec par exemple $x \mapsto x/2$), une (par exemple, si le coefficient dominant de P est négatif) ou deux (avec par exemple $x \mapsto 2x$). Remarquons également que la fonction exp est sa propre dérivée, et que, si $n > 0$, alors la dérivée de P est une fonction polynôme de degré $n - 1$.

- Nous allons déjà montrer que le nombre de solutions de l'équation proposée est au plus $n + 1$, où n est le degré de P.

- Soit maintenant P de degré $n \geqslant 1$. Observons que toute solution ξ de l'équation $e^x = P(x)$ annule la fonction $g : x \mapsto e^x - P(x)$. Si cette fonction s'annule en au moins $k \geqslant 2$ points de $\mathbb{R}$, que nous noterons $x_1, \ldots, x_k$ avec $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$, alors le théorème de Rolle affirme que la fonction $g' : x \mapsto e^x - P'(x)$ s'annule en au moins $k - 1$ points $y_1, \ldots, y_{k-1}$ avec $x_i < y_i < x_{i+1}$ pour $1 \leqslant i < k$.

- Notons alors $\mathcal{A}(n)$ l'assertion suivante :

  si P est une fonction polynôme, alors l'équation $e^x = P(x)$ possède au plus $n + 1$ solutions réelles, où n est le degré de P.

  $\mathcal{A}(0)$ est clair, d'après une remarque faite plus haut. Supposons $\mathcal{A}(n)$ acquise, et considérons une fonction polynôme de degré $n + 1$. De ce que nous venons de montrer, nous déduisons que l'équation $e^x = P(x)$ possède au plus $n + 2$ solutions : ceci établit $\mathcal{A}(n + 1)$. Par récurrence, $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Supposons P de degré pair, et de coefficient dominant positif. Nous allons montrer que l'équation $e^x = P(x)$ possède au moins une solution. Pour ce faire, étudions le comportement de $g : x \mapsto e^x - P(x)$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. Clairement, $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$; et, par raison de croissances comparées, $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Donc g change de signe ; comme elle est continue, elle s'annule au moins une fois.

- Si P est de degré pair, mais de coefficient dominant négatif, l'équation peut ne posséder aucune solution : un exemple simple est fourni par $P : x \mapsto -x^2$.

- Supposons P de degré impair, et de coefficient dominant négatif. Le même raisonnement s'applique : donc, dans ce cas encore, l'équation considérée possède au moins une solution.

- Si P est de degré impair, mais de coefficient dominant positif, l'équation peut ne posséder aucune solution : c'est le cas lorsque $P : x \mapsto kx$, avec $0 < k < 1$.