Sup PCSI2 — Exercices : dérivation (3)

Les exercices de cette feuille portent sur l'utilisation du théorème de ROLLE, *du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis.*

Q1 Pour $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, établissez l'encadrement $\dfrac{a}{b} < \dfrac{\sin(a)}{\sin(b)} < \dfrac{\pi}{2} \times \dfrac{a}{b}$.

Q2 Combien l'équation $x^5 - 5x^2 + 15x - 3 = 0$ possède-t-elle de solutions *réelles* ?

Q3 Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $p, q \in \mathbb{R}$. Combien l'équation $x^n + px + q = 0$ possède-t-elle de solutions réelles *au plus* ?

Q4 Soit P une fonction polynôme de degré n. Combien l'équation $e^x = P(x)$ a-t-elle de solutions réelles *au plus* ?

Q5 $\star\star$ Quelles sont les fonctions polynômes P telles que l'équation $\sin(x) = P(x)$ possède une infinité de solutions ?

Q6 f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et vérifie $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrez qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.

Q7 Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $[a, b]$, deux fois dérivable dans $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Soit $c \in]a, b[$; déterminez k tel que la fonction $g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - k(x-a)(x-b)$ s'annule en c. En appliquant plusieurs fois le théorème de ROLLE, prouvez l'existence de $\gamma \in]a, b[$ tel que $f(c) = \dfrac{(c-a)(c-b)}{2} \times f''(\gamma)$.

Q8 Soient f et g appartenant à $\mathcal{C}\big([a, b]\big) \cap \mathcal{D}\big(]a, b[\big)$. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(x)$.

Q9 Sous l'hypothèse $0 < a \leqslant b$, établissez l'encadrement $\dfrac{b-a}{b} \leqslant \ln\Big(\dfrac{b}{a}\Big) \leqslant \dfrac{b-a}{a}$.

Q10 Sous l'hypothèse $0 < a < b$, établissez $0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{a+b} < \dfrac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \dfrac{1}{\sqrt{ab}} < \dfrac{1}{2} \times \Big(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\Big) < \dfrac{1}{a}$. Le théorème de ROLLE sera utile !

Q11 Pour $x > 0$, prouvez l'encadrement $\Big(\dfrac{1+x}{x}\Big)^x < e < \Big(\dfrac{1+x}{x}\Big)^{x+1}$. Pour $n \geqslant 1$, prouvez l'encadrement $\dfrac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.

Q12 Soient a, b et c trois réels. Montrez qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $5ax^4 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Q13 Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{3 - x^2}{2}$ si $x < 1$, et $f(x) = \dfrac{1}{x}$ si $x \geqslant 1$. Étudiez rapidement les variations de f, puis tracez sa courbe représentative. Peut-on appliquer le T.A.F. à f sur $[0, 2]$? Déterminez tous les $c \in]0, 2[$ tels que $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2}$.

Q14 Soient p, q et r trois réels ; notons $f : x \mapsto px^2 + qx + r$. Soient a et b deux réels, vérifiant $a < b$. La formule des accroissements finis, appliquée à la restriction de f au segment $[a, b]$ vous donne un réel c, qui s'exprime *simplement* en fonction de certains des réels a, b, p, q et r. Donnez une interprétation géométrique de la valeur de c.

Q15 Soient $k \neq 0$, $c \neq 0$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b + ce^{kx}$. Explicitez λ tel que $f(x+h) - f(x) = hf'(x + \lambda h)$.

Q16 Notons $f : x \mapsto \arctan\Big(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\Big)$. Déterminez l'ensemble de définition de f ; sur quel intervalle f est-elle dérivable ? Explicitez la dérivée de f.

---

6 : $g : x \in [a, b] \mapsto \big(f'(x) - f(x)\big)e^x$; **8** : $g : x \in [a, b] \mapsto \big(f(b) - f(a)\big)g'(x) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(x)$;
16 : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
