

Les exercices de cette feuille portent sur l'utilisation du théorème de ROLLE, du théorème des accroissements finis et de l'inégalité des accroissements finis.

- Q1** Pour $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, établissez l'encadrement $\frac{a}{b} < \frac{\sin(a)}{\sin(b)} < \frac{\pi}{2} \times \frac{a}{b}$.
- Q2** Combien l'équation $x^5 - 5x^2 + 15x - 3 = 0$ possède-t-elle de solutions réelles ?
- Q3** Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $p, q \in \mathbb{R}$. Combien l'équation $x^n + px + q = 0$ possède-t-elle de solutions réelles au plus ?
- Q4** Soit P une fonction polynôme de degré n . Combien l'équation $e^x = P(x)$ a-t-elle de solutions réelles au plus ?
- Q5** ★★ Quelles sont les fonctions polynômes P telles que l'équation $\sin(x) = P(x)$ possède une infinité de solutions ?
- Q6** f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[a, b]$ et vérifie $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$. Montrez qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f''(c) = f(c)$.
- Q7** Soit $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, continue et dérivable sur $[a, b]$, deux fois dérivable dans $]a, b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$. Soit $c \in]a, b[$; déterminez k tel que la fonction $g : x \in [a, b] \mapsto f(x) - k(x-a)(x-b)$ s'annule en c . En appliquant plusieurs fois le théorème de ROLLE, prouvez l'existence de $\gamma \in]a, b[$ tel que $f(c) = \frac{(c-a)(c-b)}{2} \times f''(\gamma)$.
- Q8** Soient f et g appartenant à $\mathcal{C}([a, b]) \cap \mathcal{D}(]a, b[)$. Montrez qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
- Q9** Sous l'hypothèse $0 < a \leq b$, établissez l'encadrement $\frac{b-a}{b} \leq \ln\left(\frac{b}{a}\right) \leq \frac{b-a}{a}$.
- Q10** Sous l'hypothèse $0 < a < b$, établissez $0 < \frac{1}{b} < \frac{2}{a+b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \frac{1}{\sqrt{ab}} < \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) < \frac{1}{a}$. Le théorème de ROLLE sera utile !
- Q11** Pour $x > 0$, prouvez l'encadrement $\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$. Pour $n \geq 1$, prouvez l'encadrement $\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.
- Q12** Soient a, b et c trois réels. Montrez qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $5ax^4 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.
- Q13** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{3-x^2}{2}$ si $x < 1$, et $f(x) = \frac{1}{x}$ si $x \geq 1$. Étudiez rapidement les variations de f , puis tracez sa courbe représentative. Peut-on appliquer le T.A.F. à f sur $[0, 2]$? Déterminez tous les $c \in]0, 2[$ tels que $f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}$.
- Q14** Soient p, q et r trois réels ; notons $f : x \mapsto px^2 + qx + r$. Soient a et b deux réels, vérifiant $a < b$. La formule des accroissements finis, appliquée à la restriction de f au segment $[a, b]$ vous donne un réel c , qui s'exprime simplement en fonction de certains des réels a, b, p, q et r . Donnez une interprétation géométrique de la valeur de c .
- Q15** Soient $k \neq 0, c \neq 0$ et $f : x \in \mathbb{R} \mapsto ax + b + ce^{kx}$. Explicitez λ tel que $f(x+h) - f(x) = hf'(x+\lambda h)$.
- Q16** Notons $f : x \mapsto \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. Déterminez l'ensemble de définition de f ; sur quel intervalle f est-elle dérivable ? Explicitez la dérivée de f .

6 : $g : x \in [a, b] \mapsto (f'(x) - f(x))e^x$; **8 :** $g : x \in [a, b] \mapsto (f(b) - f(a))g'(x) = (g(b) - g(a))f'(x)$;
16 : $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;