$\boxed{\text{Sup PCSI2 — Exercices : dérivation (2)}}$

$\boxed{\text{Q1}}$ Exhibez $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, à dérivée discontinue en 0.

$\boxed{\text{Q2}}$ Exhibez $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, vérifiant $f'(0) = 0$, mais telle que $f(0)$ ne soit pas un extremum local.

$\boxed{\text{Q3}}$ Exhibez $f \in \mathcal{D}\big([1,2], \mathbb{R}\big)$, possédant un maximum et un minimum dans $[1,2]$, et telle que f' ne s'annule pas.

$\boxed{\text{Q4}}$ Trouvez un polynôme P tel que la dérivée de $f : x \mapsto e^x P(x)$ soit $x \mapsto (x-1)(x-2)e^x$.

$\boxed{\text{Q5}}$ Revoyez la définition et la dérivée des fonctions arcsin et arctan. Pour $x \geqslant 0$, quelle relation existe-t-il entre $\arctan\big(\sqrt{x}\big)$ et $\dfrac{1}{2}\arcsin\Big(\dfrac{2\sqrt{x}}{1+x}\Big)$? Vous donnerez deux méthodes différentes.

$\boxed{\text{Q6}}$ Soit f définie au voisinage de a et trois fois dérivable en a. Calculez la limite lorsque h tend vers 0 de $\dfrac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}$.

$\boxed{\text{Q7}}$ Soient $a \in \mathbb{R}$, $x_0 > 0$ et f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = a\sqrt{x}$ si $x < x_0$ et $f(x) = x^2 + 12$ si $x \geqslant x_0$. Déterminez a et x_0 tels que f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Q8}}$ Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable en $a \in \mathbb{R}$. Calculez $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f^2(a+3h) - f^2(a-h)}{h}$.

$\boxed{\text{Q9}}$ Soit $a > 0$. Calculez $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$.

$\boxed{\text{Q10}}$ Déterminez l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)}\,dt$. Explicitez $f'(x)$, puis dressez le tableau des variations de f. Vous montrerez par exemple que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \dfrac{3x^2}{2\ln(x)}$.

$\boxed{\text{Q11}}$ Exhibez $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bornée, mais telle que $f'(x)$ ne possède pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\text{Q12}}$ $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ est bornée, et sa dérivée possède une limite ℓ quand x tend vers $+\infty$. Quelle est la valeur de ℓ ?

$\boxed{\text{Q13}}$ Exhibez $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ bornée, mais telle que f' ne soit pas bornée.

$\boxed{\text{Q14}}$ Soit $f \in \mathcal{C}\big([a-h, a+h], \mathbb{R}\big) \cap \mathcal{D}\big(]a-h, a+h[\big)$. Prouvez l'existence de $k \in]0,1[$ tel que $f(a+h) - f(a-h) = h\big(f'(a+kh) + f'(a-kh)\big)$.

$\boxed{\text{Q15}}$ Revoyez la définition et la dérivée de la fonction arcsin. Soit $f : x \mapsto \big(\arcsin(2x)\big)^2$. Donnez lex expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$. Formez une relation entre x, $f'(x)$ et $f''(x)$ ne contenant aucun radical. En déduire que f est solution d'une équation différentielle, sur un intervalle que vous préciserez.

$\boxed{\text{Q16}}$ Notons $\mathcal{I} =]1, +\infty[$. Exhibez une fonction f de $\mathcal{I}$ dans lui-même dérivable, vérifiant $|f'| < 1$, mais qui n'est k-lipschitzienne pour aucun $k < 1$.

$\boxed{\text{Q17}}$ Soit a réel, distinct de 1, -1 et 0. Montrez que, parmi les tangentes à la courbe d'équation $y = a^x$, il en existe il existe une et une seule qui passe par l'origine. Donnez son équation.

$\boxed{\text{Q18}}$ $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable à droite de 0. Étudiez la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} f\Big(\frac{k}{n^2}\Big)$.

$\boxed{\text{Q19}}$ Nous disposons d'une feuille de carton, carrée, de côté A. De cette feuille, nous enlevons à chaque coin un carré de côté $a < A/2$. En repliant les quatre rectangles qui dépassent, nous obtenons une boîte de hauteur a et de côté $A - 2a$. Pour quelle valeur de a le volume de la boîte est-il maximal ?

---

6 : $f'''(a)$; **7** : $a = 8\sqrt{2}$ et $x_0 = 2$; **14** : appliquez le T.A.F. à $\Phi : x \in [0,h] \mapsto f(a+x) - f(a-x)$; **19** : $a = A/6$;
