

- Q1** Exhibez  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , à dérivée discontinue en 0.
- Q2** Exhibez  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ , vérifiant  $f'(0) = 0$ , mais telle que  $f(0)$  ne soit pas un extremum local.
- Q3** Exhibez  $f \in \mathcal{D}([1, 2], \mathbb{R})$ , possédant un maximum et un minimum dans  $[1, 2]$ , et telle que  $f'$  ne s'annule pas.
- Q4** Trouvez un polynôme  $P$  tel que la dérivée de  $f : x \mapsto e^x P(x)$  soit  $x \mapsto (x - 1)(x - 2)e^x$ .
- Q5** Revoyez la définition et la dérivée des fonctions arcsin et arctan. Pour  $x \geq 0$ , quelle relation existe-t-il entre  $\arctan(\sqrt{x})$  et  $\frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)$ ? Vous donnerez deux méthodes différentes.
- Q6** Soit  $f$  définie au voisinage de  $a$  et trois fois dérivable en  $a$ . Calculez la limite lorsque  $h$  tend vers 0 de  $\frac{f(a+3h) - 3f(a+2h) + 3f(a+h) - f(a)}{h^3}$ .
- Q7** Soient  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 > 0$  et  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = a\sqrt{x}$  si  $x < x_0$  et  $f(x) = x^2 + 12$  si  $x \geq x_0$ . Déterminez  $a$  et  $x_0$  tels que  $f$  soit continue et dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Q8** Soit  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  dérivable en  $a \in \mathbb{R}$ . Calculez  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^2(a+3h) - f^2(a-h)}{h}$ .
- Q9** Soit  $a > 0$ . Calculez  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$ .
- Q10** Déterminez l'ensemble de définition de  $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{t}{\ln(t)} dt$ . Explicitez  $f'(x)$ , puis dressez le tableau des variations de  $f$ . Vous montrerez par exemple que  $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{3x^2}{2 \ln(x)}$ .
- Q11** Exhibez  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  bornée, mais telle que  $f'(x)$  ne possède pas de limite lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
- Q12**  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  est bornée, et sa dérivée possède une limite  $\ell$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Quelle est la valeur de  $\ell$ ?
- Q13** Exhibez  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  bornée, mais telle que  $f'$  ne soit pas bornée.
- Q14** Soit  $f \in \mathcal{C}([a-h, a+h], \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(]a-h, a+h[)$ . Prouvez l'existence de  $k \in ]0, 1[$  tel que  $f(a+h) - f(a-h) = h(f'(a+kh) + f'(a-kh))$ .
- Q15** Revoyez la définition et la dérivée de la fonction arcsin. Soit  $f : x \mapsto (\arcsin(2x))^2$ . Donnez les expressions de  $f'(x)$  et  $f''(x)$ . Formez une relation entre  $x$ ,  $f'(x)$  et  $f''(x)$  ne contenant aucun radical. En déduire que  $f$  est solution d'une équation différentielle, sur un intervalle que vous préciserez.
- Q16** Notons  $\mathcal{I} = ]1, +\infty[$ . Exhibez une fonction  $f$  de  $\mathcal{I}$  dans lui-même dérivable, vérifiant  $|f'| < 1$ , mais qui n'est  $k$ -lipschitzienne pour aucun  $k < 1$ .
- Q17** Soit  $a$  réel, distinct de 1,  $-1$  et 0. Montrez que, parmi les tangentes à la courbe d'équation  $y = a^x$ , il en existe une et une seule qui passe par l'origine. Donnez son équation.
- Q18**  $f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}$  est dérivable à droite de 0. Étudiez la suite de terme général  $u_n = \sum_{1 \leq k \leq n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$ .
- Q19** Nous disposons d'une feuille de carton, carrée, de côté  $A$ . De cette feuille, nous enlevons à chaque coin un carré de côté  $a < A/2$ . En repliant les quatre rectangles qui dépassent, nous obtenons une boîte de hauteur  $a$  et de côté  $A - 2a$ . Pour quelle valeur de  $a$  le volume de la boîte est-il maximal?

---

**6** :  $f'''(a)$ ; **7** :  $a = 8\sqrt{2}$  et  $x_0 = 2$ ; **14** : appliquez le T.A.F. à  $\Phi : x \in [0, h] \mapsto f(a+x) - f(a-x)$ ;  
**19** :  $a = A/6$ ;